Laplace

1. **Würfel.** Mit einem Spielwürfel wird zweimal nacheinander gewürfelt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse?

   (a) Der erste Wurf zeigt eine gerade Augenzahl.

   Lösung: Hier muss nur ein Wurf betrachtet werden. Damit sind die Ergebnismenge Ω und das Ereignis A : «gerade Augenzahl»:

   $\Omega = \{\boxdot; \boxdot; \boxdot; \boxdot; \boxdot; \boxdot\}$ $\quad |\Omega| = 6$

   $A = \{\boxdot; \boxdot; \boxdot\}$ $\quad |A| = 3$

   Die Wahrscheinlichkeit ist

   $$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2} = 50\,\%}$$

   (b) Der zweite Wurf ist eine 6.

   Lösung: Auch hier muss nur ein Wurf betrachtet werden. Mit A : «es wird 6 gewürfelt» ergibt sich:

   $$\frac{|A|}{|\Omega|} = \boxed{\frac{1}{6} = 16.67\,\%}$$

   (c) Die Augensumme ist kleiner als Zehn.

   Lösung: Nun werden beide Würfel betrachtet. Jeder Würfel kann sechs unterschiedliche Augenzahlen zeigen, also ist

   $$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$$

   Hier ist es einfacher, das Gegenereignis $\overline{A}$:«Die Augensumme ist Zehn oder grösser» zu betrachten. Es sieht wie folgt aus:

   $\overline{A} = \{\boxdot\boxdot; \boxdot\boxdot; \boxdot\boxdot; \boxdot\boxdot; \boxdot\boxdot; \boxdot\boxdot\}$ $\quad |\overline{A}| = 6$

   Die Wahrscheinlichkeit des ursprünglichen Ereignisses ist Eins minus die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, also:

   $$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{6}{36} = 1 - \tfrac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{6} = 83.33\,\%}$$

   (d) Beide Würfe ergeben eine gerade Zahl.

   Lösung:

(e) Das Produkt der beiden Augenzahlen ergibt 20.

Lösung:

2. **Glühbirnen.** Aus einer Sendung mit 50 Glühbirnen, von denen fünf defekt sind, werden zufällig drei Glühbirnen ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse?

(a) Keine der ausgewählten Glühbirnen ist defekt.

Lösung:

(b) Genau eine der ausgewählten Glühbirnen ist defekt.

Lösung:

(c) Mindestens eine der ausgewählten Glühbirnen ist defekt.

Lösung:

3. **Jasskarten.** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie beim Jassen eine Hand mit vier Bauern (Weis 200 Punkte) erhalten? Beim Jassen werden 36 Karten an vier Personen verteilt, sodass jede Person neun Karten erhält.

Lösung: **Hinweis:** Die ursprüngliche Aufgabenstellung ist nicht eindeutig. Es ist ein Unterschied ob eine beliebige oder ein bestimmte Person alle vier Bauern erhält. Hier wird die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Person berechnet.

Die Anzahl möglicher Hände beim Jassen ist

$$|\Omega| = \binom{36}{9} = 94'143'280$$

Wenn die Hand vier Bauern enthält, können noch fünf Karten aus den verbleibenden 32 gewählt werden. Also ist die die Anzahl Hände mit vier Bauern

$$|A| = \binom{32}{5} = 201'376$$

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{201'376}{94'143'280} \approx \boxed{0.2139\,\%}$$

4. **Fussballteam.** Eine Klasse besteht aus 24 Schüler:innen, davon können 16 gut Fussball spielen. Es werden 11 Personen ausgewählt, um ein Fussballteam zu bilden.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle im Team gut Fussball spielen können?

Lösung:

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zehn Personen im Team gute Fussball spielen können?

Lösung:

5. **Tichu.** Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in Tichu eine Viererbombe zu erhalten? Ein Tichuspiel besteht aus 56 Karten, davon gibt es 13 unterschiedliche Kartenwerte (Zwei bis Ass) in je vier Farben sowie vier Sonderkarten. Eine Viererbombe sind alle vier Karten eines bestimmten Werts (z.B. alle Fünfen). Jede Person erhält 14 Karten.

Lösung: Die Anzahl mögliche Hände in Tichu beträgt

$$\binom{56}{14} = 5.8047 \cdot 10^{12}$$

Um eine Bombe zu erhalten wird zunächst der Kartenwert gewählt. Dabei gibt es 13 Möglichkeiten. Anschliessend werden die vier Karten dieses Werts ausgesucht und schliesslich 11 weitere Karten aus den verbleibenden 52.

$$13 \cdot \binom{52}{10} = 2.0566 \cdot 10^{11}$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Bombe beträgt somit

$$\frac{2.0566 \cdot 10^{11}}{5.8047 \cdot 10^{12}} = 3.543\,\%$$

6. **Würfel.** Sie würfeln mit einem Würfel viermal hintereinander. Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse?

(a) Es erscheinen vier verschiedene Augenzahlen.

Lösung:

(b) Es erscheinen nur ungerade Augenzahlen.

Lösung:

(c) Der vierte Wurf ist eine Eins.

Lösung:

(d) Es sind alles ungerade Augenzahlen **oder** der vierte Wurf ist eine Eins.

Lösung:

7. **Zahlenlotto.** Um beim Schweizer Zahlenlotto den Jackpot zu erreichen, müssen sechs Zahlen aus den Zahlen 1 bis 42 sowie die Glückszahl aus den Zahlen 1 bis 6. richtig getippt werden. Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse?

   (a) Sechs Richtige (Gewinn eine Million)

   Lösung: Die Anzahl mögliche Ereignisse sind:

   $$\binom{42}{6} = 5'245'786$$

   Daraus ist genau eine Kombination richtig, also ist die Wahrscheinlichkeit

   $$\frac{1}{5'245'786} \approx 0.00001906\,\%$$

   (b) Sechs Richtige plus Glückszahl (Gewinn Jackpot)

   Lösung: Hier wird die Wahrscheinlichkeit aus der vorangehenden Teilaufgabe mit der Wahrscheinlichkeit, die korrekte Glückszahl zu tippen, multipliziert.

   $$\boxed{\frac{1}{5'245'786} \cdot \frac{1}{6} \approx 0.000003177\,\%}$$

   (c) Fünf Richtige (Gewinn 1000 Franken)

   Lösung: Die Anzahl mögliche Ereignisse sind immer noch 8'145'060. Die Anzahl günstige Ereignisse sind fünf korrekte Zahlen und eine falsche Zahl. Dazu werden also aus den sechs korrekten Zahlen fünf ausgewählt und aus den 39 falschen Zahlen wird eine ausgewählt.

   $$\binom{6}{5} \cdot \binom{36}{1} = 6 \cdot 36 = 216$$

   Daraus ist genau eine Kombination richtig, also ist die Wahrscheinlichkeit

   $$\frac{216}{5'245'786} \approx 0.004118\,\%$$

   (d) Weniger als drei Richtige (Keinen Gewinn)

   Lösung: Die Anzahl Möglichkeiten für zwei Richtige ist

   $$\binom{6}{2} \cdot \binom{36}{4} = 15 \cdot 58'905 = 883'575$$

   Die Anzahl Möglichkeiten für eine richtige Zahl ist

   $$\binom{6}{1} \cdot \binom{36}{5} = 6 \cdot 376'992 = 2'261'952$$

   Die Anzahl Möglichkeiten für keine richtige Zahl ist

   $$\binom{36}{6} = 1'947'792$$

Die Wahrscheinlichkeit ist somit

$$\frac{883'575 + 2'261'952 + 1'947'792}{5'245'786} = \frac{5'093'319}{5'245'786} \approx 97.09\,\%$$

8. **Pferderennen.** Bei einem Pferderennen sind zwölf Pferde am Start. Bei der Dreier-Wette wird auf die ersten drei Pferde in der richtigen Reihenfolge getippt.
   (a) Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es für diesen Dreier-Tipp?

   Lösung:

   (b) Wie gross ist die Gewinnchance, wenn auf einem Wettschein zehn unterschiedliche Gewinnkombinationen ausgewählt werden können?

   Lösung:

9. **Geburtstag.** Was ist wahrscheinlicher: dass fünf Personen alle an verschiedenen Wochentagen oder dass alle am gleichen Wochentag Geburtstag haben?

Lösung: Die Ereignisse lauten:

A : Alle haben am gleichen Wochentag Geburtstag.

B : Alle haben an verschiedenen Wochentagen Geburtstag.

Die Ergebnismenge umfasst alle Kombinationen von Geburtstagen. Da für jede Person aus sieben Wochentagen gewählt werden kann ist

$$|\Omega| = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5$$

Es gibt sieben Kombinationen, an welchen alle Personen am gleichen Wochentag Geburtstag haben: Alle haben am Montag Geburtstag oder am Dienstag, usw. Also

$$|A| = 7$$

Damit kann die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ berechnet werden:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7}{7^5} = \frac{1}{7^4} = \boxed{\frac{1}{2401} \approx 0.04165\,\%}$$

Wenn alle Personen an verschiedenen Wochentagen Geburtstag haben, kann für die erste Person der Wochentag frei gewählt werden. Für die zweite Person steht ein Wochentag weniger zu Verfügung, für die dritte zwei Wochentage weniger usw.

$$|B| = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Damit kann die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ berechnet werden:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7^5} = \boxed{\frac{360}{2401} \approx 15.00\,\%}$$

10. Geburtstag. Wie gross ist bei einer Gruppe von sechs zufällig ausgewählten Personen die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) niemand im Dezember Geburtstag hat?

Lösung:
59.33 %

(b) alle in verschiedenen Monaten Geburtstag haben?

Lösung: 22 %

(c) mindestens zwei Personen im gleichen Monat Geburtstag haben?

Lösung: 77.72 %

(d) alle im Sommer Geburtstag haben (Juni bis August)?

Lösung: 0.0244 %

(e) die Geburtstage der Gruppe in genau zwei von den 12 Monaten liegen? (schwierig)

Lösung: 0.142 %

11. Geburtstag. Mit einer Gruppe von Personen wird gewettet, dass mindestens eine Person im März Geburtstag hat.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, wenn die Gruppe 23 Personen umfasst?

Lösung: Das Ereignis und Gegenereignis lauten:

A : Mindestens eine von n Person hat im März Geburtstag.
$\overline{A}$: Keine von n Person hat im März Geburtstag.

Die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A})$ kann wie folgt geschrieben werden:

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{11}{12}\right)^n$$

Damit kann $P(A)$ für $n = 23$ berechnet werden:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\tfrac{11}{12}\right)^{23} \approx 0.8648 = 86.48\,\%$$

(b) Wie gross muss die Gruppe sein, damit die Gewinnchancen grösser als 90 % sind.

Lösung: Nun ist

$$P(A) > 0.9 \quad \Longrightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) \leq 0.1$$

Damit ergibt sich eine Exponentialgleichung, welche nach n aufgelöst wird:

$$\begin{array}{rrl|l} & \left(\frac{11}{12}\right)^n &= 0.1 & \log \\ \iff & n \cdot \log\left(\frac{11}{12}\right) &= \log(0.1) & :\log\left(\frac{11}{12}\right) \\ \iff & n &= \dfrac{\log(0.1)}{\log\left(\frac{11}{12}\right)} & \\ \iff & n &\approx 26.46 & \end{array}$$

Die Gruppe muss also mindestens 27 Personen umfassen.