Kombinatorik

Stefan Rothe

23.07.2026



Inhaltsverzeichnis

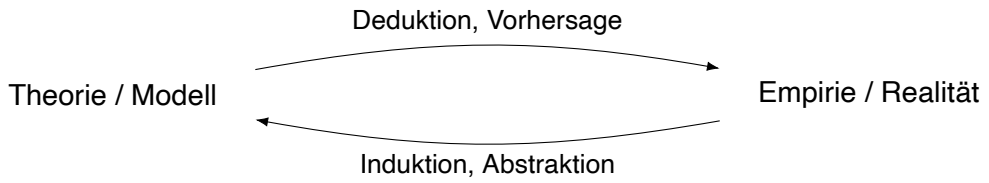
1 Bedeutung der Stochastik **2**
2 Zufallsexperimente **3**
3 Wahrscheinlichkeit **5**
4 Urnenmodell **7**

© Gymnasium Kirchenfeld
Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)

1 Bedeutung der Stochastik

1.1 Wissenschaftliche Erkenntnis

Wissenschaftliche Erkenntnis entsteht in einem Wechselspiel zwischen Empirie und Theorie. Durch Beobachten der Realität entsteht ein Erfahrungswissen (Empirie). Das Erfahrungswissen wird abstrahiert, es werden verallgemeinerte Theorien gebildet, welche ein Modell der Realität darstellen. Aufgrund des Modells lassen sich wiederum Vorhersagen formulieren, welche überprüft werden können. Damit kann überprüft werden in welchen Bereichen das Modell zuverlässig ist.



Beispiel. *Jemand beobachtet, dass der Sonne an mehreren Tagen um die gleiche Zeit aufgeht. Daraus wird das Modell gebildet, dass die Sonne immer zur gleichen Zeit aufgeht. Durch Überprüfung kann festgestellt werden, dass das Modell keine längerfristige Gültigkeit hat und wohl überdacht werden muss.*

1.2 Stochastik

Der Begriff Stochastik stammt vom griechischen *stochastikē technē*, der «Kunst des Vermutens». Es ist das mathematische Teilgebiet, welches sich mit Daten und dem Zufall beschäftigt. Die Stochastik wird in die beiden Teilgebiete der Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung unterteilt.

1.3 Beschreibende Statistik (Empirie)

Die beschreibende Statistik ist die mathematische Grundlage für alle empirischen Wissenschaften, also für alle Wissenschaften, welche Sachverhalte mit Hilfe von Experimenten, Beobachtungen oder Befragungen untersuchen. Insbesondere trifft dies auf die Naturwissenschaften zu. Aber auch in den Sozialwissenschaften wie z.B. in der Psychologie und Pädagogik werden immer mehr empirische Ansätze verfolgt.

Die beschreibende Statistik hat das Ziel, empirische Daten mit Hilfe von Tabellen, Grafiken und Kennzahlen übersichtlich darzustellen und einzuordnen.

1.4 Wahrscheinlichkeitsrechnung (Theorie)

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Grundlage für alle Wissenschaften, welche sich mit zufälligen Ereignissen beschäftigen. Sie stellt Modelle zu Verfügung, mit welchen Zufälle modelliert werden können und mit welchen Vorhersagen für zufällige Ereignisse gemacht werden können.

2 Zufallsexperimente

2.1 Ergebnisraum

Bei einem **Zufallsexperiment** wird aus einer Menge von möglichen Ergebnissen, dem **Ergebnisraum** Ω zufällig genau ein Ergebnis ausgewählt.

Beispiel. *Beim Werfen eines Spielwürfels ist der Ergebnisraum die Menge aller möglichen Augenzahlen von eins bis sechs:*

$$\Omega = \{\boxdot;\ \boxdot;\ \boxdot;\ \boxdot;\ \boxdot;\ \boxdot\}$$

Das Werfen eines Würfels ist ein Zufallsexperiment. Es tritt immer genau eine bestimmte Augenzahl auf.

Das Ergebnis eines Zufallsexperiments kann nicht vorhergesagt werden.

2.2 Ereignis

Ein **Ereignis** ist eine Teilmenge des Ergebnisraums.

Beispiel. *Beim Werfen eines Spielwürfels besteht das Ereignis G: «Eine gerade Zahl wird gewürfelt» aus den drei Ergebnissen ⚂, ⚅ und ⚅:*

$$G = \{\boxdot;\ \boxdot;\ \boxdot\}$$

Das Ereignis P: «Eine Primzahl wird gewürfelt» besteht aus den drei Ergebnissen ⚂, ⚄ und ⚅:

$$P = \{\boxdot;\ \boxdot;\ \boxdot\}$$

Die leere Menge $\{\}$ stellt ein **unmögliches Ereignis** dar, der Ergebnisraum Ω ist das **sichere Ereignis**.

2.3 Gegenereignis

Das **Gegenereignis** $\overline{A}$ eines Ereignisses A ist die Menge, welche alle Ergebnisse enthält, welche nicht in A enthalten sind:

$$\overline{A} = \Omega \setminus A$$

Beispiel. *Das Ereignis U: «Keine gerade Zahl wird gewürfelt» ist das Gegenereignis von G.*

$$U = \Omega \setminus G = \boxdot;\ \boxdot;\ \boxdot;\ \boxdot;\ \boxdot;\ \boxdot \setminus \{\boxdot;\ \boxdot;\ \boxdot\} = \{\boxdot;\ \boxdot;\ \boxdot\}$$

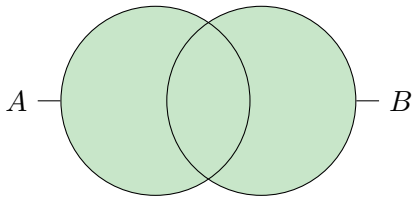
U kann natürlich auch als «Eine ungerade Zahl wird gewürfelt» beschrieben werden.

2.4 Ereignisse zusammenfassen

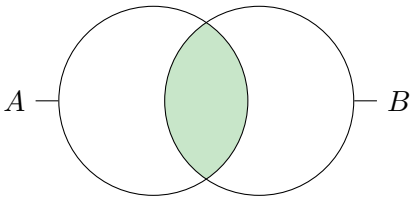
Ereignisse können gemäss folgenden Regeln zusammengefasst werden.

Das Ereignis **«A oder B»** besteht aus der Vereinigungsmenge der Ereignisse A und B. Es wird mathematisch als $A \cup B$ geschrieben.

Das Ereignis **«A und B»** besteht aus der Schnittmenge der Ereignisse A und B. Es wird mathematisch als $A \cap B$ geschrieben.



A oder B ($A \cup B$)



A und B ($A \cap B$)

Beispiel. *Das Ereignis «Eine Primzahl oder eine gerade Zahl wird gewürfelt» ist*

$$P \cup G = \{\boxdot; \boxdot; \boxdot; \boxdot; \boxdot\}$$

Das Ereignis «Eine Primzahl und eine gerade Zahl wird gewürfelt» ist

$$P \cap G = \{\boxdot\}$$

3 Wahrscheinlichkeit

3.1 Definition nach Kolmogorov

Jedem Ereignis wird eine Zahl zwischen 0 und 1 zugeordnet. Ein Ereignis

Kolmogorov-Axiome. Für die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses gelten folgende Bedingungen:

1. $0 \leq P(E) \leq 1$: Die Wahrscheinlichkeit ist eine reelle Zahl zwischen 0 und 1.
2. $P(\Omega) = 1$: Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist gleich 1;
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ falls $A \cap B = \{\}$: Wenn unvereinbare Ereignisse zusammengefasst werden, wird ihre Wahrscheinlichkeit addiert.

Die Wahrscheinlichkeit kann immer als **Prozentzahl** verstanden werden.

Beispiel. *Bei einem Würfel wird jedem Elementarereignis die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zugeordnet:*

$$P(\boxdot) = P(\boxdot) = P(\boxdot) = P(\boxdot) = P(\boxdot) = P(\boxdot) = \tfrac{1}{6}$$

Da die Grundereignisse alle unvereinbar sind, ist die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses

$$P(\Omega) = P(\boxdot) + P(\boxdot) + P(\boxdot + P(\boxdot) + P(\boxdot) + P(\boxdot) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = 1$$

3.2 Addition von Wahrscheinlichkeiten

Addition von Wahrscheinlichkeiten. Wenn das Ereignis A die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ hat und das Ereignis B die Wahrscheinlichkeit $P(B)$, dann hat das Ereignis $A \cup B$ die Wahrscheinlichkeit:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3.3 Gegenereignis

Die Wahrscheinlichkeit eines Gegenereignisses beträgt Eins minus die Wahrscheinlichkeit der Ereignisses.

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

Beispiel. *Bei einem idealen Spielwürfel beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass **nicht** eine Sechs (Ereignis $A = \{\boxdot\}$) gewürfelt wird:*

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

3.4 Laplace-Wahrscheinlichkeit

Ein **Laplace-Experiment** ist ein Zufallsexperiment, bei welchem alle Ergebnisse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten. Bei einem Laplace-Experiment mit n Ergebnissen ist die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis $\frac{1}{n}$.

Beispiel. *Bei einem idealen Spielwürfel (Laplace-Würfel) treten alle Augenzahlen gleich häufig auf. Da sechs mögliche Augenzahlen auftreten können, beträgt die Wahrscheinlichkeit für jede Augenzahl $\frac{1}{6}$.*

Bei Laplace-Experimenten kann die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für ein Ereignis A berechnet werden, indem die Anzahl günstige Ergebnisse durch die Anzahl mögliche Ergebnisse geteilt wird:

Laplace-Wahrscheinlichkeit. Falls alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Anzahl Ergebnisse im Ereignis geteilt durch gesamte Anzahl Ergebnisse.

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl mögliche Ergebnisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Beispiel. *Beim Werfen eines Würfels handelt es sich um eine Laplace-Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A = \{$⚄; ⚅$\}$, dass die Augenzahl Fünf oder grösser geworfen wird, kann also so berechnet werden:*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

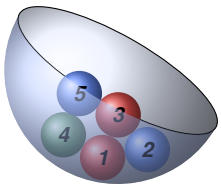
4 Urnenmodell

Anhand des Urnenmodells werden Formeln für die Grösse von Ergebnisraum für bestimmte Fragestellungen ermittelt.

Laut Modell befinden sich in einem Gefäss, der Urne, n unterscheidbare Kugeln. Der Einfachheit halber werden die Kugeln durchnummeriert.

Nun werden in verschiedenen Varianten k Kugeln zufällig aus der Urne gezogen. Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es?

Beispiel. *In einer Urne befinden sich fünf Kugeln, die mit 1 bis 5 beschriftet sind.*



Beim Ziehen von Kugeln aus der Urne werden folgende zwei Varianten unterschieden:

- **Ziehen mit Zurücklegen.** Jede gezogene Kugel wird vor der nächsten Ziehung wieder in die Urne zurückgelegt. Das bedeutet, dass bei jeder Ziehung n Kugeln vorhanden sind.
- **Ziehen ohne Zurücklegen.** Eine gezogene Kugel wird nicht mehr zurückgelegt. Folglich ist bei jeder folgenden Ziehung immer eine Kugel weniger in der Urne.

Ausserdem gibt es zwei Varianten, wie die gezogenen Kugeln angeordnet werden:

- **Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge.** Die Kugeln werden in der Reihenfolge angeordnet, wie sie gezogen werden. Beispielsweise wird so die Jokerzahl im Schweizer Zahlenlotto ermittelt.
- **Ziehen ohne Beachtung der Reihenfolge.** Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Kugeln angeordnet werden. Beispielsweise werden so die Lottozahlen ermittelt.

Aus der Kombination dieser Varianten gibt es insgesamt vier Anwendungen des Urnenmodells, die im folgenden einzeln betrachtet werden.

4.1 Fakultät

Damit im Folgenden Formel einfachen notiert werden können, wird die Fakultät definiert: Die **Fakultät** der positiven natürlichen Zahl n ist das Produkt aller positiven natürlichen Zahlen von Eins bis n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Beispiel. $1! = 1 \qquad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \qquad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

TI-30X Auf dem Taschenrechner wird die Fakultät ebenfalls durch ein Ausrufezeichen dargestellt.

Die Fakultät von n wird berechnet, indem zuerst n eingegeben wird und dann die Taste ! nCr nPr einmal gedrückt wird.

4.2 Binomialkoeffizient

Ausserdem wird der **Binomialkoeffizient** der Zahlen n und k wie folgt definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

Dabei werden im Zähler beginnend mit n immer um eins kleinere Zahlen multipliziert, insgesamt k Zahlen. Im Nenner werden die ersten k Zahlen multipliziert.

Beispiel.

$$\binom{7}{3} = \underbrace{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}}_{3 \text{ Faktoren}} = 35 \qquad \binom{6}{4} = \underbrace{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}_{4 \text{ Faktoren}} = 15$$

TI-30X Auf dem Taschenrechner wird der Binomialkoeffizient als n nCr k dargestellt.

Der Binomialkoeffizient von n und k wird berechnet, indem zuerst n eingegeben wird, dann die Taste ! nCr nPr zweimal gedrückt, dann k eingegeben wird.

4.3 Geordnetes Auswählen mit Wiederholung

Bei jeder Ziehung einer Kugel gibt es n Möglichkeiten. Wird die Ziehung k Mal wiederholt, so gibt es insgesamt

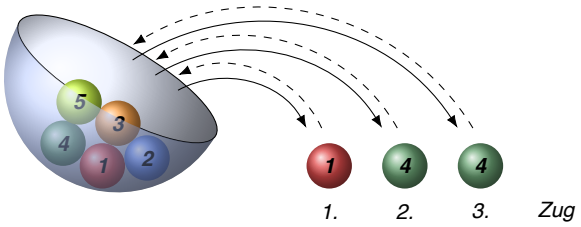
$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ Mal}} = n^k$$

Möglichkeiten.

Geordnetes Auswählen mit Wiederholung. Die Anzahl Möglichkeiten, aus n Elementen k geordnet mit Wiederholung auszuwählen, beträgt

$$n^k$$

Beispiel. *Aus einer Urne mit $n = 5$ Kugeln werden $k = 3$ Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Beispielsweise wird zuerst die Kugel 1 gezogen und zurückgelegt. Danach wird die Kugel 4 gezogen und zurückgelegt. Schliesslich wird nochmals die Kugel 4 gezogen und zurückgelegt.*



Insgesamt gibt es $n^k = 5^3 = 125$ mögliche Ergebnisse.

Beispiel. *Die Kombination eines Zahlenschlosses besteht aus vier Ziffern.*

Es wird also vier Mal ($k = 4$) eine Ziffer ($n = 10$) ausgewählt. Die gleiche Ziffer kann mehrmals ausgewählt werden (geordnet), die Anordnung spielt eine Rolle (geordnet).

Achtung: *Das Bilden einer vierstelligen Zahl ist ein komplizierter, da an erster Stelle keine Null stehen darf.*

4.4 Geordnetes Auswählen ohne Wiederholung

Hier ist bei jeder Ziehung eine Kugel weniger vorhanden. Bei k Ziehungen gibt es demnach

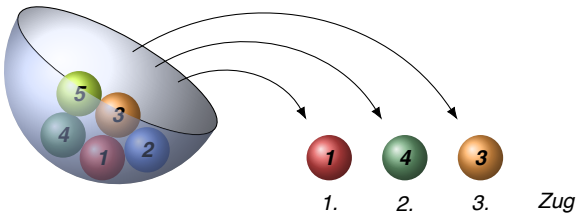
$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

mögliche Ergebnisse. Da die Kugeln nicht zurückgelegt werden, kann die gleiche Kugel nicht mehrmals gezogen werden.

Geordnetes Auswählen ohne Wiederholung. Die Anzahl Möglichkeiten, aus n Elementen k geordnet ohne Wiederholung auszuwählen, beträgt

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$$

Beispiel. *Aus einer Urne mit $n = 5$ Kugeln werden $k = 3$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Beispielsweise wird zuerst die Kugel 1 gezogen. Danach wird die Kugel 4 gezogen. Schliesslich wird die Kugel 3 gezogen.*



Insgesamt gibt es

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

mögliche Ergebnisse.

4.5 Ungeordnetes Auswählen ohne Wiederholung

Wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt, dann können alle Ergebnisse, welche aus den gleichen Kugeln bestehen, zusammengefasst werden. Es gibt bei k Ziehungen jeweils $k!$ Ergebnisse mit gleichen Kugeln. Somit gibt es bei dieser Variante insgesamt

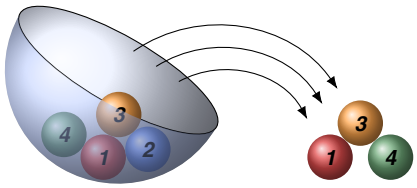
$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

mögliche Ergebnisse.

Ungeordnetes Auswählen ohne Wiederholung. Die Anzahl Möglichkeiten, aus n Elementen k ungeordnet ohne Wiederholung auszuwählen, beträgt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Beispiel. *Aus einer Urne mit $n = 5$ Kugeln werden $k = 3$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Beispielsweise werden die Kugeln 1, 3 und 4 in beliebiger Reihenfolge gezogen.*



Insgesamt gibt es

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

mögliche Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit für das abgebildete Ergebnis beträgt somit $\frac{1}{10}$.

Beispiel. *Beim Zahlenlotto werden sechs Zahlen aus 45 gezogen. Dabei gibt es*

$$\frac{45!}{6! \cdot (45-6)!} = \frac{45!}{6! \cdot 39!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8'145\,060$$

Die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto zu gewinnen, beträgt also etwa 0.000012 %*.*

4.6 Anwendung: Gleicher Geburtstag

Fragestellung: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das in einer Klasse von 24 zwei Schüler:innen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?

Es wird angenommen, dass das Jahr 365 Tage hat. Zunächst wird die Anzahl Möglichkeiten, die Geburtstage auf die Schüler:innen zu verteilen, berechnet. Eine Betrachtungsmöglichkeit am Urnenmodell ist, dass sich in der Urne für jeden Tag im Jahr eine Kugel befindet ($n = 365$). Jede:r der Klasse zieht einen Tag und legt diesen wieder zurück ($k = 25$). Somit gibt es

$$n^k = 365^{24} \approx 1.717 \cdot 10^{61}$$

Möglichkeiten, die Geburtstage auf die Klasse zu verteilen.

Die geforderte Wahrscheinlichkeit kann nicht sinnvoll direkt berechnet werden, da es zu viele Varianten zu beachten gibt. Deshalb wird die Gegenwahrscheinlichkeit, dass alle an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben, berechnet. Dazu wird das Urnnenexperiment wiederholt, jetzt wird die Kugel aber nicht wieder zurückgelegt. Es gibt dabei

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{365!}{341!}$$

Möglichkeiten. Da $365!$ eine zu grosse Zahl für den Taschenrechner ergibt, wird anstelle wie folgt gerechnet:

$$\binom{n}{k} \cdot k! = \binom{365}{24} \cdot 24! \approx 1.443 \cdot 10^{61}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben, ist somit

$$1 - \frac{1.443 \cdot 10^{61}}{1.717 \cdot 10^{61}} = 1 - 0.46166 = 53.8\,\%$$