Ableitung weiterer Funktionen

1. **Produktregel.** Leite die Funktion h ab, indem du h in zwei Funktionen f und g aufteilst und die Produktregel anwendest.

   (a) $h(x) = (4x - 2) \cdot \sin(x)$

$f(x) = 4x - 2$	$f'(x) = 4$
$g(x) = \sin(x)$	$g'(x) = \cos(x)$
$h'(x) = 4\sin(x) + (4x - 2)\cos(x)$	

   (b) $h(x) = (4x - 2) \cdot \cos(x)$

$f(x) = 4x - 2$	$f'(x) = 4$
$g(x) = \cos(x)$	$g'(x) = -\sin(x)$
$h'(x) = 4\cos(x) - (4x - 2)\sin(x)$	

   (c) $h(x) = (4x - 2) \cdot \sqrt{x}$

$f(x) = 4x - 2$	$f'(x) = 4$
$g(x) = \sqrt{x}$	$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$h'(x) = 4\sqrt{x} + \dfrac{4x - 2}{2\sqrt{x}}$	

   (d) $h(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin(x)$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$
$g(x) = \sin(x)$	$g'(x) = \cos(x)$
$h'(x) = \dfrac{-\sin(x)}{x^2} + \dfrac{\cos(x)}{x}$	

   (e) $h(x) = \left(3x^2 - 5\right) \cdot \sqrt{x}$

$f(x) = 3x^2 - 5$	$f'(x) = 6x$
$g(x) = \sqrt{x}$	$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$h'(x) = 6x\sqrt{x} + \dfrac{3x^2 - 5}{2\sqrt{x}}$	

2. **Quotientenregel.** Leite die Funktion h ab, indem du h in zwei Funktionen f und g aufteilst und die Quotientenregel anwendest.

(a) $h(x) = \dfrac{0.5\sin(x)}{x^2}$

$f(x) = 0.5\sin(x)$	$f'(x) = 0.5\cos(x)$
$g(x) = x^2$	$g'(x) = 2x$
$h'(x) = \dfrac{0.5x^2\cos(x) - x\sin(x)}{x^4}$	

(b) $h(x) = \dfrac{0.5\cos(x)}{x^2}$

$f(x) = 0.5\cos(x)$	$f'(x) = -0.5\sin(x)$
$g(x) = x^2$	$g'(x) = 2x$
$h'(x) = \dfrac{-0.5x^2\sin(x) - x\cos(x)}{x^4}$	

(c) $h(x) = \dfrac{3x}{x-2}$

$f(x) = 3x$	$f'(x) = 3$
$g(x) = x - 2$	$g'(x) = 1$
$h'(x) = \dfrac{-6}{(x-2)^2}$	

(d) $h(x) = \dfrac{3x - 8}{x - 2}$

$f(x) = 3x - 8$	$f'(x) = 3$
$g(x) = x - 2$	$g'(x) = 1$
$h'(x) = \dfrac{2}{(x-2)^2}$	

(e) $h(x) = \dfrac{2x}{\sin(x)}$

$f(x) = 2x$	$f'(x) = 2$
$g(x) = \sin(x)$	$g'(x) = \cos(x)$
$h'(x) = \dfrac{2\sin(x) - 2x\cos(x)}{\sin^2(x)}$	

3. Kettenregel. Leite die Funktion h ab, indem du h in zwei Funktionen f und g aufteilst und die Kettenregel anwendest.

(a) $h(x) = \sin\left(x^2 + 3\right)$

$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$g(x) = x^2 + 3$	$g'(x) = 2x$
$f'(g(x)) = \cos\left(x^2 + 3\right)$	$h'(x) = \cos\left(x^2 + 3\right) \cdot 2x = 2x\cos\left(x^2 + 3\right)$

(b) $h(x) = (2x + 9)^4$

$f(x) = x^4$	$f'(x) = 4x^3$
$g(x) = 2x + 9$	$g'(x) = 2$
$f'(g(x)) = 4(2x + 9)^3$	$h'(x) = 8(2x + 9)^3$

(c) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$g(x) = x^2 + 1$	$g'(x) = 2x$
$f'(g(x)) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}$	$h'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$

(d) $h(x) = 2\cos(3x)$

$f(x) = 2\cos(x)$	$f'(x) = -2\sin(x)$
$g(x) = 3x$	$g'(x) = 3$
$f'(g(x)) = -2\sin(3x)$	$h'(x) = -6\sin(3x)$

(e) $h(x) = \dfrac{3}{(1 - 2x)^4}$

$f(x) = \dfrac{3}{x^4} = 3x^{-4}$	$f'(x) = -12x^{-5}$
$g(x) = 1 - 2x$	$g'(x) = -2$
$f'(g(x)) = \dfrac{-12}{(1-2x)^5}$	$h'(x) = \dfrac{24}{(1-2x)^5}$

4. Produktregel. Bestimme die Ableitung mit Hilfe der Produktregel.

(a) $f(x) = x^2\left(1 - 3x^2\right)$

Lösung:

$$f'(x) = 2x\left(1 - 3x^2\right) + x^2(-6x) = 2x - 6x^3 - 6x^3 = \boxed{-12x^3 + 2x}$$

(b) $g(z) = \left(z^2 - z + 1\right)(1 - z)$

Lösung:

$$\begin{aligned} g'(z) &= (2z-1)(1-z) + \left(z^2 - z + 1\right)(-1) \\ &= 2z - 2z^2 - 1 + z - z^2 + z - 1 = \boxed{-3z^2 + 4z - 2} \end{aligned}$$

(c) $h(t) = \left(4 + 3t^2\right)\left(7 - 4t^3\right) + 1$

Lösung:

$$\begin{aligned} h'(t) &= 6t\left(7 - 4t^3\right) + \left(4 + 3t^2\right)\left(-12t^2\right) \\ &= 42t - 24t^4 - 48t^2 - 36t^4 = \boxed{-60t^4 - 48t^2 + 42t} \end{aligned}$$

(d) $f(x) = 3x^2\sqrt{x}$

Lösung: Mit der Produktregel:

$$f'(x) = 6x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 3x^2 \tfrac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} = 6x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} = \boxed{\tfrac{15}{2}x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{15}{2}\sqrt{x^3}}$$

Hier ist es einfacher, wenn zuerst alle x zusammengefasst werden:

$$f(x) = 3x^{\frac{5}{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = 3 \cdot \tfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \boxed{\tfrac{15}{2}x^{\frac{3}{2}}}$$

(e) $h(x) = \left(x^2 - 1\right)\sqrt{x}$

Lösung:

$$h'(x) = 2x\sqrt{x} + \left(x^2 - 1\right) \cdot \tfrac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}}$$
$$= 2x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} = \boxed{\tfrac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} = \tfrac{5}{2}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

(f) $g(u) = (2u+1)\sqrt[5]{u^2}$

Lösung:

$$g'(u) = 2\sqrt[5]{u^2} + (2u+1) \cdot \tfrac{2}{5} u^{\frac{-3}{5}}$$
$$= 2u^{\frac{2}{5}} + \tfrac{4}{5} u^{\frac{2}{5}} + \tfrac{2}{5} u^{\frac{-3}{5}} = \boxed{\tfrac{14}{5} u^{\frac{2}{5}} + \tfrac{2}{5} u^{\frac{-3}{5}} = \tfrac{14}{5}\sqrt[5]{u^2} + \frac{2}{5\sqrt[5]{u^3}}}$$

(g) $f(z) = \left(z^3 - 2\right)\left(4z + \sqrt{z}\right)$

Lösung:

$$f'(z) = 3z^2\left(4z + \sqrt{z}\right) + \left(z^3 - 2\right)\left(4 + \tfrac{1}{2} z^{\frac{-1}{2}}\right)$$
$$= 12z^3 + 3z^{\frac{5}{2}} + 4z^3 + \tfrac{1}{2} z^{\frac{5}{2}} - 8 - z^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \boxed{16z^3 + \tfrac{7}{2} z^{\frac{5}{2}} - z^{\frac{-1}{2}} - 8 = 16z^3 + \tfrac{7}{2}\sqrt{z^5} - \frac{1}{\sqrt{z}} - 8}$$

(h) $f(x) = \left(2x^2 + 5x + 3\right)^2$

Lösung: Hier wird der Term $\left(2x^2 + 5x + 3\right)$ mit sich selbst multipliziert. Das bedeutet für die Produktregel, dass beide Summanden gleich sind:

$$(g \cdot g)' = g' \cdot g + g \cdot g' = 2 \cdot g' \cdot g$$

Es reicht also, den Term mit seiner Ableitung zu multiplizieren und zu verdoppeln.

$$f'(x) = 2\left(2x^2 + 5x + 3\right)(4x + 5) = \left(4x^2 + 10x + 6\right) \cdot (4x + 5)$$
$$= 16x^3 + 20x^2 + 40x^2 + 50x + 24x + 30 = \boxed{16x^3 + 60x^2 + 74x + 30}$$

5. **Quotientenregel.** Bestimme die Ableitung mit Hilfe der Quotientenregel.

(a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x + 1 - x + 1}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{2}{(x+1)^2}}$$

(b) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x}$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{6x \cdot x - \left(3x^2+1\right) \cdot 1}{x^2} = \frac{6x^2 - 3x^2 - 1}{x^2} = \boxed{\frac{3x^2-1}{x^2}}$$

(c) $f(x) = \dfrac{1-2x}{3x+4}$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{-2(3x+4) - (1-2x) \cdot 3}{(3x+4)^2} = \frac{-6x - 8 - 3 + 6x}{(3x+4)^2} = \boxed{\frac{-11}{(3x+4)^2}}$$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 2x - \left(x^2+1\right) \cdot 2}{4x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 2}{4x^2} = \frac{2x^2-2}{4x^2} = \boxed{\frac{x^2-1}{2x^2}}$$

(e) $g(x) = \dfrac{x-1}{3x}$

Lösung:

$$g'(x) = \frac{1 \cdot 3x - (x-1) \cdot 3}{9x^2} = \frac{3x - 3x + 3}{9x^2} = \frac{3}{9x^2} = \boxed{\frac{1}{3x^2}}$$

(f) $g(x) = \dfrac{3x}{1-x}$

Lösung:

$$g'(x) = \frac{3(1-x) - 3x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{3 - 3x + 3x}{(1-x)^2} = \boxed{\frac{3}{(1-x)^2}}$$

(g) $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

Lösung:

$$g'(x) = \frac{0 \cdot (x+1) - 1 \cdot 1}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{-1}{(x+1)^2}}$$

(h) $g(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$

Lösung:

$$g'(x) = \frac{0\left(1+x^2\right) - 3 \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \boxed{\frac{-6x}{\left(1+x^2\right)^2}}$$

6. Kettenregel. Bestimme die Ableitung mit Hilfe der Kettenregel.

(a) $f(x) = \sin(2x)$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{2\cos(2x)}$$

(b) $f(x) = \sin\left(x^2 + x\right)$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{(2x+1)\cos\left(x^2+x\right)}$$

(c) $f(x) = \cos(\pi x)$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{-\pi\sin(\pi x)}$$

(d) $f(x) = \cos\left(x^2\right)$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{-2x\sin\left(x^2\right)}$$

(e) $f(x) = \tan\left(x^2\right)$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{\frac{2x}{\cos^2\left(x^2\right)}}$$

(f) $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}}$$

(g) $f(x) = \cos^2(x)$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{-2\cos(x)\sin(x)}$$

(h) $f(x) = \tan^2(x)$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{\frac{2\tan(x)}{\cos^2(x)}}$$

(i) $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}}$$

7. **Natürliche Exponentialfunktion.** Wie lautet die Ableitung?

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{-2\mathrm{e}^{-2x}}$$

(b) $f(x) = \mathrm{e} + \mathrm{e}^{x^2}$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{2x\mathrm{e}^{x^2}}$$

(c) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{\frac{-1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 2x}$$

(d) $f(t) = 3\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}$

Lösung:

$$f'(t) = \boxed{-3t\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}}$$

(e) $f(t) = t^2 \cdot \mathrm{e}^{1-t}$

Lösung:

$$f'(t) = \boxed{t(2-t)\mathrm{e}^{1-t}}$$

(f) $f(t) = \sqrt{\mathrm{e}^t}$

Lösung:

$$f'(t) = \boxed{\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^t}}$$

8. Allgemeine Exponentialfunktion. Wie lautet die Ableitung?

(a) $f(x) = 6^x$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{\ln(6)6^x}$$

(b) $f(x) = 5^{-x}$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{-\ln(5)5^{-x}}$$

(c) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^{2x} + 7$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{\ln(3)3^{2x}}$$

(d) $f(x) = 3x \cdot 10^x$

Lösung: Hier wird die Produktregel angewendet. Anschliessend wird $3 \cdot 10^x$ ausgeklammert.

$$f'(x) = 3 \cdot 10^x + 3x \cdot 10^x \cdot \ln(10) = \boxed{3 \cdot 10^x(1 + \ln(10) \cdot x)}$$

(e) $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{\ln(2)\frac{2^x \cdot x - 2^x}{x^2}}$$

(f) $f(x) = (2\mathrm{e})^x$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{(\ln(2) + 1) \cdot (2\mathrm{e})^x}$$

9. Logarithmusfunktion. Wie lautet die Ableitung?

(a) $f(x) = \ln(2 - 3x)$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{\frac{-3}{2 - 3x}}$$

(b) $f(x) = \log(x + 1)$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{\ln(10)(1 + x)}}$$

(c) $f(x) = \frac{1}{4} \log_2\left(x^2\right)$

Lösung:

$$f'(x) = \boxed{\frac{1}{\ln(2) \cdot 2x}}$$

(d) $f(t) = \frac{t}{\ln(t)}$

Lösung:

$$f'(t) = \boxed{\frac{\ln(t) - 1}{(\ln(t))^2}}$$

(e) $f(t) = \sqrt{t}\ln(t)$

Lösung:

$$f'(t) = \boxed{\frac{\ln(t) + 2}{2\sqrt{t}}}$$

(f) $f(t) = \ln\left(2 + \sqrt{t}\right)$

Lösung:

$$f'(t) = \boxed{\frac{1}{2\left(t + 2\sqrt{t}\right)}}$$