Anwendungen der Differenzialrechnung

1. **Blechdose.** Eine Verpackungsfirma will eine zylinderförmige Konservendose mit einem Inhalt von einem Liter (1 dm^3) so herstellen, dass möglichst wenig Material verbraucht wird. Dazu muss die Oberfläche der Dose minimal sein. Welchen Radius und welche Höhe muss die Dose aufweisen?

Lösung: Zunächst stellen wir die Formeln für Volumen und Oberfläche eines Zylinders zusammen (Fundamentum S. 30):

$$V = \pi r^2 h \qquad\qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Das bekannte Volumen wird eingesetzt und die Volumengleichung nach h aufgelöst.

$$1 = \pi r^2 h \qquad \Longrightarrow \qquad h = \frac{1}{\pi r^2}$$

Nun kann damit h in der Oberflächengleichung ersetzt werden und es entsteht die Funktion $S(r)$, welche die Oberfläche in Abhängigkeit vom Radius r berechnet.

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$$

Die Funktion wird abgeleitet:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2}$$

Die Ableitung wird Null gesetzt, um den Extrempunkt zu bestimmen:

$$\begin{array}{rl|l} S'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} & & S'(r) = 0 \\ 0 = 4\pi r - \frac{2}{r^2} & & \cdot r^2 \\ 0 = 4\pi r^3 - 2 & & : 2 \\ 0 = 2\pi r^3 - 1 & & + 1 \\ 1 = 2\pi r^3 & & : (2\pi) \\ \frac{1}{2\pi} = r^3 & & \sqrt[3]{\ } \\ \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = r & & \end{array}$$

Der Extrempunkt liegt bei $r \approx 0.542$.

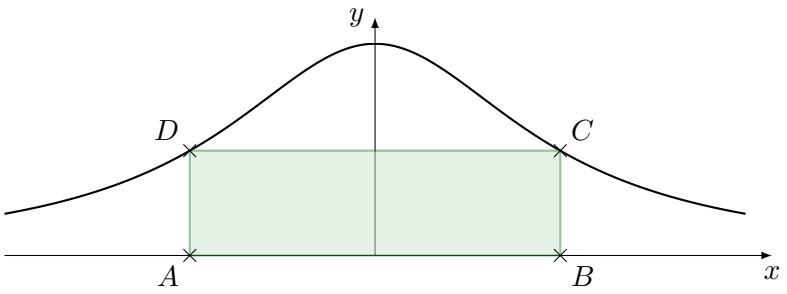
Da für alle $r > 0$ gilt $S''(r) = 4\pi + \frac{4}{r^3} > 0$, handelt es sich um ein Minimum.

Nun wird noch die Höhe berechnet:

$$h = \frac{1}{\pi r^2} \approx 1.084$$

Die Blechdose muss einen Radius von $\boxed{5.42\,\text{cm}}$ und eine Höhe von $\boxed{10.84\,\text{cm}}$ haben.

2. Funktion. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{48}{x^2+12}$. Ein Rechteck mit den Ecken A und B auf der x-Achse und den Ecken C und D auf dem Funktionsgraphen soll maximalen Flächeninhalt haben. Wie lauten die Koordinaten der Punkte C und D?



Lösung: Wir bezeichnen die Koordinaten von C mit $C(x/y)$. Dann ist die Fläche des Rechtecks

$$A(x) = 2x \cdot y = 2x \cdot \frac{48}{x^2+12} = 96 \cdot \frac{x}{x^2+12}$$

Die Flächenfunktion $A(x)$ wird mit der Quotientenregel abgeleitet:

$$A'(x) = 96 \cdot \frac{1 \cdot \left(x^2+12\right) - x \cdot 2x}{\left(x^2+12\right)^2} = 96 \cdot \frac{12-x^2}{\left(x^2+12\right)^2}$$

Die Ableitung wird gleich Null gesetzt.

$$\begin{array}{rl|l} 0 &= 96 \cdot \dfrac{12-x^2}{\left(x^2+12\right)^2} & \cdot \left(x^2+12\right)^2 \\ 0 &= 96 \cdot \left(12-x^2\right) & : 96 \\ 0 &= 12 - x^2 & + x^2 \\ x^2 &= 12 & \sqrt{} \\ x &= \pm\sqrt{12} & \end{array}$$

Die x-Koordinaten der Punkte C und D liegen also bei $\pm\sqrt{12}$. Nun muss ermittelt werden, ob diese Koordinaten zu einem Hoch- oder Tiefpunkt gehören.

Dazu wird die zweite Ableitung ermittelt:

$$\begin{aligned} A''(x) &= 96 \cdot \frac{-2x \cdot \left(x^4+24x^2+144\right) - \left(12-x^2\right) \cdot \left(4x^3+48x\right)}{\left(x^2+12\right)^4} \\ &= 96 \cdot \frac{-2x^5-48x^3-288x-48x^3-576x+4x^5+48x^3}{\left(x^2+12\right)^4} \\ &= 96 \cdot \frac{2x^5-48x^3-864x}{\left(x^2+12\right)^4} \end{aligned}$$

Im Zähler der zweiten Ableitung wird $x = \pm\sqrt{12}$ eingesetzt:

$$2\left(\sqrt{12}\right)^5 - 48\left(\sqrt{12}\right)^3 - 864\sqrt{12} \approx -3991 < 0 \implies \text{Hochpunkt}$$

$$2\left(-\sqrt{12}\right)^5 - 48\left(-\sqrt{12}\right)^3 - 864\left(-\sqrt{12}\right) \approx 3991 > 0 \implies \text{Tiefpunkt}$$

Also liegt der Hochpunkt bei $x = \sqrt{12}$.

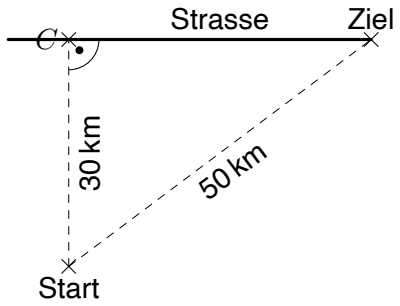
Die y-Koordinate des Punkts C wird durch einsetzen in die Funktion f bestimmt:

$$y = f\left(\sqrt{12}\right) = \frac{48}{\sqrt{12}^2 + 12} = \frac{48}{24} = 2$$

Die Koordinaten der Punkte lauten

$$\boxed{C\left(\sqrt{12}/2\right)} \qquad \boxed{D\left(-\sqrt{12}/2\right)}$$

3. Rallye. Eine Rallye führt durch die Wüste. Das Ziel liegt 50 km vom Start entfernt. 30 km vom Start entfernt verläuft eine Strasse, die gerade zum Ziel führt. Ein Team kann mit dem Fahrzeug durch die Wüste mit 60 km/h fahren und auf der Strasse mit 100 km/h. Welcher Weg ist der schnellste?



Lösung: Der senkrechte Abstand vom Start zur Strasse beträgt 30 km. Die Strassenstrecke vom Fusspunkt C zum Ziel Z hat nach dem Satz des Pythagoras die Länge $\sqrt{50^2 - 30^2} = 40\,\text{km}$. Wir bezeichnen mit x die Strecke entlang der Strasse vom Punkt C bis zur Abzweigung P. Die Gesamtzeit setzt sich zusammen aus der Zeit durch die Wüste und der Zeit auf der Strasse:

$$T(x) = \frac{\sqrt{30^2 + x^2}}{60} + \frac{40 - x}{100}, \quad 0 \le x \le 40$$

Ableiten nach x:

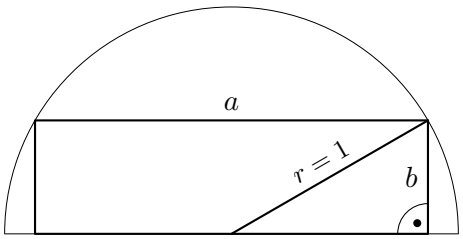
$$T'(x) = \frac{x}{60\sqrt{900 + x^2}} - \frac{1}{100}$$

Nullsetzen der Ableitung:

$$
\begin{aligned}
T'(x) &= \frac{x}{60\sqrt{900+x^2}} - \frac{1}{100} && \mid\ T'(x) = 0 \\
\frac{x}{60\sqrt{900+x^2}} &= \frac{1}{100} && \mid\ \cdot 300 \\
\frac{5x}{\sqrt{900+x^2}} &= 3 && \mid\ \cdot \sqrt{900+x^2} \\
5x &= 3\sqrt{900+x^2} && \mid\ \text{quadrieren} \\
25x^2 &= 9(900+x^2) && \mid\ \text{ausklammern} \\
25x^2 &= 8100 + 9x^2 && \mid\ -9x^2 \\
16x^2 &= 8100 && \mid\ :16 \\
x^2 &= 506.25 && \mid\ \sqrt{\ } \\
x &= 22.5
\end{aligned}
$$

Da $x = 22.5$ im Bereich $0 \le x \le 40$ liegt und $T''(x) > 0$ ist, handelt es sich um ein Minimum. Die Wüstenstrecke beträgt $\sqrt{30^2 + 22.5^2} = 37.5\,\text{km}$, die Strassenstrecke $40 - 22.5 = 17.5\,\text{km}$. Die schnellste Route führt durch die Wüste bis zur Abzweigung P und von dort auf der Strasse zum Ziel. Die Fahrzeit beträgt $T(22.5) = \frac{37.5}{60} + \frac{17.5}{100} = 0.8\,\text{h} = \boxed{48\,\text{min}}$.

4. **Halbkreis.** Einem Halbkreis mit Radius 1 wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine Seite auf dem Durchmesser liegt. Welche Länge a und Breite b muss das Rechteck haben, damit seine Fläche möglichst gross wird?



Lösung: Wir legen ein Koordinatensystem so fest, dass der Mittelpunkt des Halbkreises im Ursprung liegt. Die Ecken des Rechtecks auf dem Halbkreis haben die Koordinaten $\left(\pm\frac{a}{2}/b\right)$.

Die Punkte haben den Abstand 1 vom Mittelpunkt, also gilt mit dem Satz des Pythagoras:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad b = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks in Abhängigkeit von a lautet:

$$A(a) = a \cdot b = a\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}, \quad 0 \le a \le 2$$

Ableiten mit der Produkt- und Kettenregel:

$$A'(a) = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} + a \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}} \cdot \left(\frac{-a}{2}\right) = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} - \frac{a^2}{4\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}}$$

Nullsetzen der Ableitung:

$$
\begin{aligned}
A'(a) = \sqrt{1-\frac{a^2}{4}} - \frac{a^2}{4\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}} \quad &\Big| \quad A'(a) = 0 \\
\sqrt{1-\frac{a^2}{4}} = \frac{a^2}{4\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}} \quad &\Big| \quad \cdot 4\sqrt{1-\frac{a^2}{4}} \\
4\left(1-\frac{a^2}{4}\right) = a^2 \quad &\Big| \quad \text{ausmultiplizieren} \\
4 - a^2 = a^2 \quad &\Big| \quad + a^2 - 4 \\
0 = 2a^2 - 4 \quad &\Big| \quad : 2 \\
0 = a^2 - 2 \quad &\Big| \quad + 2 \\
a^2 = 2 \quad &\Big| \quad \sqrt{} \\
a = \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Die zweite Ableitung $A''(\sqrt{2}) < 0$ bestätigt ein Maximum. Die Breite b berechnet sich zu $b = \sqrt{1-\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Das Rechteck hat die Abmessungen $\boxed{a = \sqrt{2} \approx 1.414}$ und $\boxed{b = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707}$.

5. **Bogenfenster.** Ein Bogenfenster besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Wie müssen die Abmessungen des Fensters gewählt werden, damit bei einer Fensterfläche von 250 dm^2 möglichst wenig Fensterumrandung benötigt wird?

Lösung: Wir bezeichnen den Radius des Halbkreises mit r und die Höhe des Rechtecks mit h. Die Breite des Rechtecks beträgt $2r$.

Die Fensterfläche setzt sich aus der Fläche des Rechtecks und der Hälfte der Kreisfläche zusammen:

$$
\begin{aligned}
250 = 2rh + \frac{\pi}{2}r^2 \quad &\Big| \quad -\frac{\pi}{2}r^2 \\
250 - \frac{\pi}{2}r^2 = 2rh \quad &\Big| \quad : (2r) \\
\frac{125}{r} - \frac{\pi}{4}r = h
\end{aligned}
$$

Die Fensterumrandung besteht aus der unteren Kante, den beiden Seitenkanten und dem Halbkreisbogen:

$$U(r) = 2r + 2h + \pi r = 2r + 2\left(\frac{125}{r} - \frac{\pi}{4}r\right) + \pi r = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r + \frac{250}{r}$$

Die Umrandungsfunktion wird abgeleitet und gleich Null gesetzt:

$$\begin{aligned} U'(r) &= \left(2+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{250}{r^2} && \mid\ U'(r)=0 \\ \left(2+\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{250}{r^2} && \mid\ \cdot r^2 \\ \left(2+\frac{\pi}{2}\right) r^2 &= 250 && \mid\ :\left(2+\frac{\pi}{2}\right) \\ r^2 &= \frac{250}{2+\frac{\pi}{2}} = \frac{500}{4+\pi} && \mid\ \sqrt{\ } \\ r &= \sqrt{\frac{500}{4+\pi}} \approx 8.37 \end{aligned}$$

Da $U''(r) = \frac{500}{r^3} > 0$ gilt, handelt es sich um ein Minimum. Die Höhe des Rechtecks berechnet sich zu

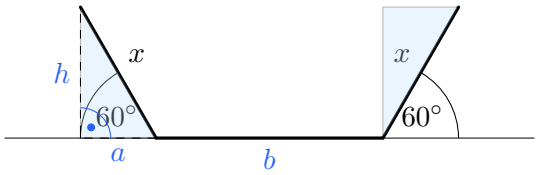
$$h = \frac{125}{r} - \frac{\pi}{4} r = r\left(\frac{125}{r^2} - \frac{\pi}{4}\right) = r\left(\frac{4+\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = r$$

Das Fenster hat die Abmessungen:

- Halbkreisradius $\boxed{r \approx 8.37\,\text{dm}}$
- Breite des Rechtecks $\boxed{2r \approx 16.73\,\text{dm}}$
- Höhe des Rechtecks $\boxed{h \approx 8.37\,\text{dm}}$.

Die Umrandung ist dann 59.76 dm lang.

6. **Blechrinne.** Aus einem Stück Blech von 60 cm Breite soll eine Rinne mit trapezförmigem Querschnitt hergestellt werden, indem auf beiden Seiten ein Teil des Blechs um 60° nach oben gebogen wird. Die Querschnittsfläche der Rinne soll möglichst gross werden. Wie viele Zentimeter x des Blechs müssen links und rechts nach oben gebogen werden?



Lösung: Die gesuchte Länge des Rands wird mit x bezeichnet, andere Längen werden mit a, b und h bezeichnet.

Die Fläche des Trapezes entspricht der Fläche des Rechtecks mit Länge $a+b$ und Breite h. Dies sieht man, wenn das blaue Dreieck rechts weggeschnitten und links angesetzt wird. Also lautet die Flächenformel:

$$A = (a+b)\cdot h$$

Die Fläche sollte von x abhängig sein, also suchen wir nach Formeln, mit welchen sich a, b und h durch x ausdrücken lassen.

Die Länge des Bleches beträgt 60 cm, also:

$$2x + b = 60 \qquad \Longrightarrow \qquad b = 60 - 2x$$

Am rechtwinkligen Dreieck können mit den Winkelfunktionen Zusammenhänge zwischen x, h und a angegeben werden. Wir wissen, dass $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos(60°) = \frac{1}{2}$

$$\sin(60°) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad h = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$$

$$\cos(60°) = \tfrac{1}{2} = \frac{a}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad a = \tfrac{1}{2} \cdot x$$

Damit können in der Flächengleichung alle Variablen durch x ersetzt werden:

$$A(x) = (a+b) \cdot h = \left(\tfrac{1}{2}x + 60 - 2x\right) \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot x = \left(60 - \tfrac{3}{2}x\right) \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$$

$$= 30\sqrt{3} \cdot x - \tfrac{3\sqrt{3}}{4} \cdot x^2$$

Nun wird die Ableitung bestimmt:

$$A'(x) = 30\sqrt{3} - \tfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot x$$

Die Ableitung wird gleich Null gesetzt, um die Extremstelle zu finden:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 30\sqrt{3} - \tfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot x && \mid\ A'(x) = 0 \\ 0 &= 30\sqrt{3} - \tfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot x && \mid\ : \sqrt{3} \\ 0 &= 30 - \tfrac{3}{2} \cdot x && \mid\ \cdot \tfrac{2}{3} \\ 0 &= 20 - x && \mid\ + x \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Die Extremstelle ist ein Maximum, da die zweite Ableitung immer kleiner als Null ist:

$$A''(x) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} < 0$$

Die beiden Randstücke sind also je $\boxed{20\,\text{cm}}$ lang.

7. **Newtonverfahren.** Bestimme die Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x + x$ in der Nähe von $x_0 = 0$ mit Hilfe des Newtonverfahrens. Lösungsvideo

Lösung: Die Ableitung der Funktion lautet $f'(x) = e^x + 1$. Die Newton-Iteration hat die Form:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_n} + 1}$$

Mit dem Startwert $x_0 = 0$ ergeben sich die folgenden Näherungen:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= -0.5 \\ x_2 &\approx -0.56631 \\ x_3 &\approx -0.56714 \\ x_4 &\approx -0.56714 \end{aligned}$$

Die Folge konvergiert gegen die Nullstelle $\boxed{x \approx -0.56714}$.

8. **Näherung für Pi.** Mit dem Newton-Verfahren kann eine Näherung für die Kreiszahl ermittelt werden. Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ hat bekanntlich eine Nullstelle bei π. Nähere diese Nullstelle mit dem Newton-Verfahren an. Verwende $x_0 = 3$ als Startwert.

Lösung: Die Ableitung lautet $f'(x) = \cos(x)$. Damit ist die rekursive Darstellung:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)} = x_n - \tan(x_n)$$

Die Folgenglieder lauten:

$$x_0 = 3$$
$$x_1 = 3.142546541$$
$$x_2 = 3.141592653$$
$$x_3 = 3.141592654$$
$$x_4 = 3.141592654$$

Die Folge konvergiert gegen die Kreiszahl $\boxed{\pi \approx 3.141592654}$.