Maturaaufgaben

1. Analysis Matura GH 2018. **(0P)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{-1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$.

(a) Bestimme die Nullstellen der Funktion f. (1P)

Lösung:

$$\begin{aligned} \tfrac{-1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 &= 0 \quad &&| \cdot(-4) \\ x^4 + x^3 - 6x^2 &= 0 \quad &&| \text{ ausklammern} \\ x^2\left(x^2 + x - 6\right) &= 0 \quad &&| \text{ Zweiklammeransatz} \\ x^2(x+3)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Die Nullstellen lauten

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 2$$

(b) Bestimme die erste und die zweite Ableitung der Funktion f. (1P)

Lösung:

$$f'(x) = -x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 + 3x \qquad f''(x) = -3x^2 - \tfrac{3}{2}x + 3$$

(c) Bestimme die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von f. (2P)

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \quad &&| \text{ einsetzen} \\ -x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 + 3x &= 0 \quad &&| \cdot 4 \\ -4x^3 - 3x^2 + 12x &= 0 \quad &&| \ x \text{ ausklammern} \\ x\left(-4x^2 - 3x + 12\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{2,3} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 12}}{2 \cdot (-4)} = \frac{3 \pm \sqrt{201}}{-8}$$

Die x-Koordinaten der Extrempunkte lauten:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -2.147 \qquad x_3 = 1.397$$

Art bestimmen:

$$\begin{aligned} f''(-2.147) = -7.608 &\implies \text{Hochpunkt} \\ f''(0) = 3 &\implies \text{Tiefpunkt} \\ f''(1.397) = -4.950 &\implies \text{Hochpunkt} \end{aligned}$$

y-Koordinaten bestimmen:

$$f(0) = 0$$
$$f(-2.147) = 4.076$$
$$f(1.397) = 1.294$$

Die Extrempunkte lauten:

$H_1(-2.147/4.076)$ $T(0/0)$ $H_2(1.397/1.294)$

(d) Skizziere den Graphen der Funktion f im untenstehenden Koordinatensystem. (2P)

(e) Bestimme den Winkel, in welchem der Funktionsgraph von f die x-Achse bei $x = -3$ schneidet. (2P)

Lösung:

$$\varphi = \arctan\left(f'(-3)\right) = \arctan(11.25) \approx \boxed{84.92°}$$

(f) Gib die Funktionsgleichung der Tangente an den Funktionsgraphen von f an der Stelle $x = 3$ an. (2P)

Lösung:

$$t(x) = -24.75x + 60.75$$

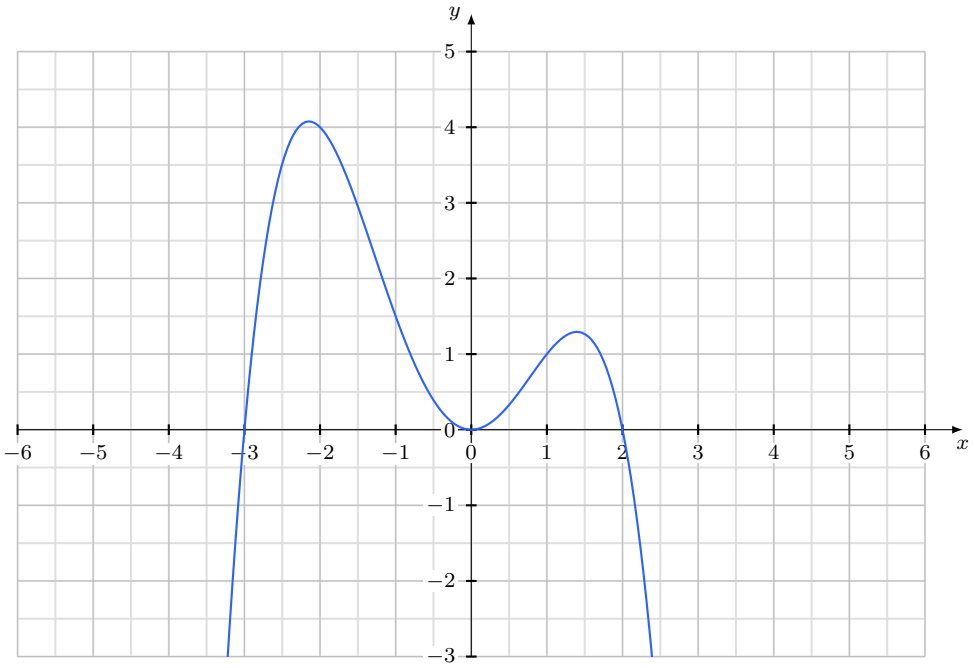
(g) Bestimme die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse auf dem Intervall $[-2, 1]$. (2P)

Lösung:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{-1}{20}x^5 - \tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3$$

$$F(1) = 0.3875$$
$$F(-2) = -3.4$$

$$A = \left|\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = |F(1) - F(-2)| = |0.3875 - (-3.4)| = 3.7875$$


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6

2. Analysis Matura GH 2019. **(0P)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2^x - x^2$.

(a) Skizziere den Graphen von f im untenstehenden Koordinatensystem. (1P)

(b) Zeige, dass $2^x = \mathrm{e}^{x \ln(2)}$ gilt. (1P)

Lösung: Die Gleichung wird logarithmiert:

$$\begin{array}{rl|l} 2^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln(2)} & & \ln \\ \ln\left(2^x\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{x \cdot \ln(2)}\right) & & \text{Logarithmusgesetz} \\ x \cdot \ln(2) = x \cdot \ln(2) \cdot \ln(\mathrm{e}) & & \ln(\mathrm{e}) = 1 \\ x \cdot \ln(2) = x \cdot \ln(2) & & \end{array}$$

(c) Bestimme den Schnittpunkt des Funktionsgraphen von f mit der y-Achse. (1P)

Lösung:

$$f(0) = 2^0 - 0^2 = 1$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse lautet $\boxed{S(0/1)}$.

(d) Weise rechnerisch nach, dass $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ Nullstellen von f sind. Berechne mit dem Newton-Raphson-Verfahren die dritte Nullstelle von f auf acht Dezimalstellen genau. Verwende als Startwert $x_0 = -0.75$. (3P)

Lösung:

$$f(2) = 2^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0 \qquad f(4) = 2^4 - 4^2 = 16 - 16 = 0$$

Für das Newton-Verfahren wird die Ableitung benötigt:

$$f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x - 2x$$

Die Rekursionsformel lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2^{x_n} - x_n^2}{\ln(2) \cdot 2^{x_n} - 2x_n}$$

Die Rekursionsschritte sind:

$$\begin{aligned} x_0 &= -0.75 \\ x_1 &= -0.766789266 \\ x_2 &= -0.766664703 \\ x_3 &= -0.766664696 \end{aligned}$$

Die dritte Nullstelle liegt ungefähr bei $\boxed{x \approx -0.76666470}$.

(e) Berechne den Flächeninhalt, der vom Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[0, 4]$ eingeschlossen wird. (4P)

Lösung: Zunächst wird die Stammfunktion bestimmt:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{\ln(2)} \cdot 2^x - \tfrac{1}{3}x^3$$

Da sich eine Nullstelle im Intervall befindet, muss das Integral aufgeteilt werden. Die Stammfunktion wird an den Integrationsgrenzen berechnet:

$$F(0) = \tfrac{1}{\ln(2)} \cdot 2^0 - \tfrac{1}{3} \cdot 0^3 = \tfrac{1}{\ln(2)} \approx 1.443$$

$$F(2) = \tfrac{1}{\ln(2)} \cdot 2^2 - \tfrac{1}{3} \cdot 2^3 \approx 3.104$$

$$F(4) = \tfrac{1}{\ln(2)} \cdot 2^4 - \tfrac{1}{3} \cdot 4^3 \approx 1.750$$

Nun wird die Fläche berechnet:

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = |F(2) - F(0)| + |F(4) - F(2)| \\ &= |3.104 - 1.443| + |1.750 - 3.104| = 1.661 + 1.354 = \boxed{3.016} \end{aligned}$$

(f) Berechne den Schnittwinkel des Funktionsgraphen von f mit der y-Achse. (2P)

Lösung: Zunächst wird die Steigung des Graphen bei $x = 0$ berechnet:

$$f'(0) = \ln(2) \cdot 2^0 - 2 \cdot 0 = \ln(2)$$

Die Steigung ist der Tangens des Steigungswinkels, also ist dieser

$$\varphi = \arctan\left(\ln(2)\right) \approx 34.73°$$

Der Winkel mit der y-Achse ist

$$90° - \varphi = \boxed{55.27°}$$

(g) Bestimme die Gleichung der Tangente t an den Funktionsgraphen von f an der Stelle $x = 2$. (3P)

Lösung: Die allgemeine Geradengleichung lautet $t(x) = mx + q$. Die Steigung entspricht der Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x = 2$, also

$$m = f'(2) = \ln(2) \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \approx -1.227$$

Es muss ein Punkt der Tangente bekannt sein. Also wird der Punkt auf f mit der x-Koordinate 2 berechnet:

$$f(2) = 2^2 - 2^2 = 0$$

Der Punkt $(2/0)$ muss also auf der Tangente liegen, d.h.

$$\begin{array}{rl|l} t(2) = 0 & & \text{einsetzen} \\ -1.227 \cdot 2 + q = 0 & & \text{ausrechnen} \\ -2.454 + q = 0 & & +2.454 \\ q = 2.455 & & \end{array}$$

Die Gleichung der Tangente lautet

$$\boxed{t(x) = -1.227x + 2.455}$$

