Integration

1. **Stammfunktionen.** Gegeben ist eine Stammfunktion F einer Polynomfunktion f. Welche zwei der folgenden Funktionen sind für alle $c \neq 0$ ebenfalls Stammfunktionen von f?

   ◯ $c \cdot F$ ◯ $c + F$ ◯ $F - c$ ◯ $c - F$ ◯ $\frac{F}{c}$

2. **Ableitungs- und Stammfunktion.** Es sei f eine Polynomfunktion und F eine ihrer Stammfunktionen.

   Welche zwei der folgenden Aussagen sind korrekt?

   ◯ Eine Funktion F heisst Stammfunktion der Funktion f, wenn gilt: $f(x) = F(x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$.

   ◯ Eine Funktion f' heisst Ableitungsfunktion von f, wenn gilt: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = f'(x)$.

   ◯ Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 definiert ist, gibt $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle an.

   ◯ Die Funktion f hat unendlich viele Stammfunktionen, die sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

   ◯ Wird die Stammfunktion F einmal integriert, entsteht die Funktion f.

3. **Zusammenhang zwischen Funktion und Stammfunktionen.** Die Funktionen F und G sind unterschiedliche Stammfunktionen einer Polynomfunktion f. Welche zwei der folgenden Aussagen sind korrekt?

   ◯ $F'(x) = G'(x)$

   ◯ $F(x) + G(x) = c, \quad c \neq 0$

   ◯ $\int_0^2 F(x)\,\mathrm{d}x = f(2) - f(0)$

   ◯ $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = G(2) - G(0)$

   ◯ $F(x) = c \cdot G(x), \quad c \neq 1$

4. **Einfache Stammfunktionen.** Wie lauten die Stammfunktionen?

   (a) $\int 7\,\mathrm{d}x$ (c) $\int 6x\,\mathrm{d}x$ (e) $\int x^2\,\mathrm{d}x$

   (b) $\int x\,\mathrm{d}x$ (d) $\int (6x + 7)\,\mathrm{d}x$ (f) $\int 5x^4\,\mathrm{d}x$

5. **MathemaTrick 1.** Wie lauten die Stammfunktionen von f? Lösungsvideo

   (a) $f(x) = 8x^3$ (c) $f(x) = x^{99} + 2x^{999}$

   (b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$ (d) $f(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{4}$

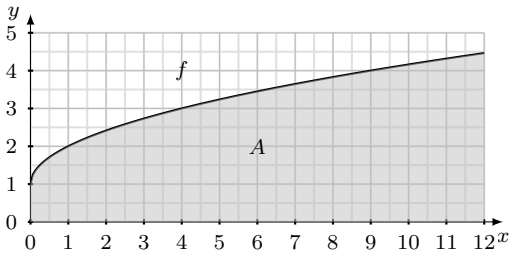
6. **MathemaTrick 2.** Wie lauten diese unbestimmten Integrale? Lösungsvideo

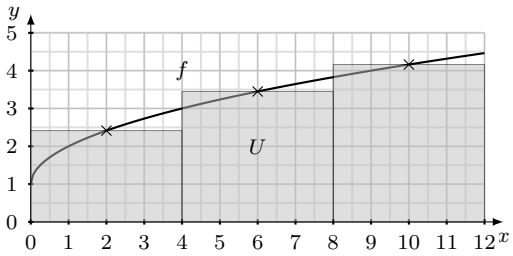
   (a) $\int 4x^6 \,\mathrm{d}x$ (b) $\int \left(x^2 + 2x - 7\right) \mathrm{d}x$ (c) $\int \left(8ax^4 + \frac{1}{7}x^3\right) \mathrm{d}x$

7. **Fläche zwischen Graph und x-Achse.** Gegeben ist eine Funktion f. Der Inhalt A der Fläche, die auf dem Intervall $[0, 12]$ zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt, kann durch den folgenden Term näherungsweise berechnet werden:

   $$U = (f(2) + f(6) + f(10)) \cdot 4$$

   In der Abbildung ist neben dem Graphen von f die Fläche U grau dargestellt.





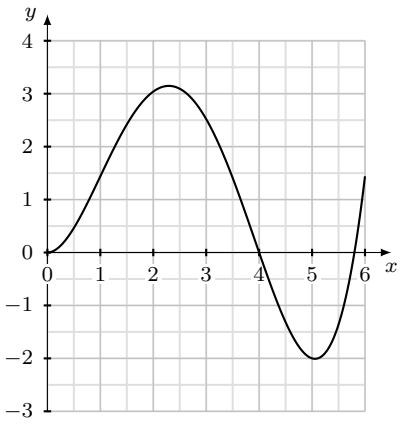
   Mit welchen zwei der folgenden Terme wird der Flächeninhalt A genauer als mit dem Ausdruck U angenähert?

   - ◯ $(f(0) + f(4) + f(8)) \cdot 4$
   - ◯ $(f(1.5) + f(4.5) + f(7.5) + f(10.5)) \cdot 3$
   - ◯ $\int_0^{12} f(x) \,\mathrm{d}x$
   - ◯ $f(6) \cdot 12$
   - ◯ $f(12) \cdot 4$

8. **Aussagen über bestimmte Integrale.** In der Abbildung ist der Graph der Funktion f im Intervall $[0; 6]$ dargestellt.

   Welche zwei der folgenden Aussagen sind korrekt?

   - ◯ $\int_0^4 f(x) \,\mathrm{d}x > \int_0^5 f(x) \,\mathrm{d}x$
   - ◯ $\int_3^4 f(x) \,\mathrm{d}x > \int_4^5 f(x) \,\mathrm{d}x$
   - ◯ $\int_0^6 f(x) \,\mathrm{d}x > \int_0^4 f(x) \,\mathrm{d}x$
   - ◯ $\int_0^4 f(x) \,\mathrm{d}x = 0$
   - ◯ $\int_4^6 f(x) \,\mathrm{d}x > 0$



Hinweis: Wenn du das Berechnen des bestimmten Integrals genügend geübt hast, reicht es bei diesen Aufgaben, die Stammfunktion zu bestimmen.

9. Polynomfunktionen.

(a) $\int_0^2 4x^3 \,\mathrm{d}x$

(b) $\int_2^4 \frac{1}{5}x^3 \,\mathrm{d}x$

(c) $\int_{-1}^2 \left(x^2+3\right) \mathrm{d}x$

(d) $\int_3^5 \left(\frac{1}{2}x-2\right) \mathrm{d}x$

(e) $\int_0^3 2x(1-x) \,\mathrm{d}x$

(f) $\int_{-3}^3 (x-1)^2 \,\mathrm{d}x$

10. Gebrochenrationale Funktionen.

(a) $\int_2^4 \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$

(b) $\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} \frac{3}{x^5} \,\mathrm{d}x$

(c) $\int_1^2 \left(2x-\frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x$

(d) $\int_1^3 \left(4x-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right) \mathrm{d}x$

(e) $\int_3^5 \frac{x-2}{x} \,\mathrm{d}x$

(f) $\int_2^3 \frac{x^2+4x+3}{x} \,\mathrm{d}x$

11. Wurzelfunktionen.

(a) $\int_1^4 3\sqrt{x} \,\mathrm{d}x$

(b) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^8 \sqrt[3]{x} \,\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^1 x\sqrt{x} \,\mathrm{d}x$

(e) $\int_1^4 \left(2x+6\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$

(f) $\int_1^4 \sqrt{\frac{3}{x^3}} \,\mathrm{d}x$

12. Winkelfunktionen. Hinweis: Für die Berechnung von Werten von Winkelfunktionen muss auf dem Taschenrechner die Einheit Radiant (RAD) gewählt werden.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \,\mathrm{d}t$

(b) $\int_\pi^{2\pi} \cos(t) \,\mathrm{d}t$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} -2\sin(t) \,\mathrm{d}t$

(d) $\int_0^{\pi} (4\sin(t)-3\cos(t)) \,\mathrm{d}t$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)} \,\mathrm{d}t$

(f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(t) \,\mathrm{d}t$

13. MathemaTrick Parameter 1. Wie lautet der Parameter a? Lösungsvideo

(a) $\int_0^2 \left(x^2+ax\right) \mathrm{d}x = 8$

(b) $\int_1^2 \left(x^2+a\right) \mathrm{d}x = 2$

14. MathemaTrick Parameter 2. Welchen Wert muss $b>0$ haben, damit die Gleichung korrekt ist? Lösungsvideo

$$\int_0^b \left(x^2-3\right) \mathrm{d}x = 0$$