Integration

1. **Stammfunktionen.** Gegeben ist eine Stammfunktion F einer Polynomfunktion f. Welche zwei der folgenden Funktionen sind für alle $c \neq 0$ ebenfalls Stammfunktionen von f?

   ◯ $c \cdot F$ √ $c + F$ √ $F - c$ ◯ $c - F$ ◯ $\frac{F}{c}$

2. **Ableitungs- und Stammfunktion.** Es sei f eine Polynomfunktion und F eine ihrer Stammfunktionen.

   Welche zwei der folgenden Aussagen sind korrekt?

   ◯ Eine Funktion F heisst Stammfunktion der Funktion f, wenn gilt: $f(x) = F(x) + c \ (c \in \mathbb{R})$.

   ◯ Eine Funktion f' heisst Ableitungsfunktion von f, wenn gilt: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = f'(x)$.

   √ **Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 definiert ist, gibt $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle an.**

   √ **Die Funktion f hat unendlich viele Stammfunktionen, die sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden.**

   ◯ Wird die Stammfunktion F einmal integriert, entsteht die Funktion f.

3. **Zusammenhang zwischen Funktion und Stammfunktionen.** Die Funktionen F und G sind unterschiedliche Stammfunktionen einer Polynomfunktion f. Welche zwei der folgenden Aussagen sind korrekt?

   √ $F'(x) = G'(x)$

   ◯ $F(x) + G(x) = c, \quad c \neq 0$

   ◯ $\int_0^2 F(x)\,\mathrm{d}x = f(2) - f(0)$

   √ $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = G(2) - G(0)$

   ◯ $F(x) = c \cdot G(x), \quad c \neq 1$

4. **Einfache Stammfunktionen.** Wie lauten die Stammfunktionen?

   (a) $\int 7\,\mathrm{d}x = 7x + C$

   (b) $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C$

   (c) $\int 6x\,\mathrm{d}x = 3x^2 + C$

   (d) $\int (6x + 7)\,\mathrm{d}x = 3x^2 + 7x + C$

   (e) $\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$

(f) $\int 5x^4 \,\mathrm{d}x = x^5 + C$

5. MathemaTrick 1. Wie lauten die Stammfunktionen von f? Lösungsvideo

(a) $f(x) = 8x^3$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int 8x^3 \,\mathrm{d}x = 8 \cdot \frac{x^4}{4} + C = \boxed{2x^4 + C}$$

(b) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \left(3x^2 + 4x + 2\right) \mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x + C = \boxed{x^3 + 2x^2 + 2x + C}$$

(c) $f(x) = x^{99} + 2x^{999}$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \left(x^{99} + 2x^{999}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^{100}}{100} + 2 \cdot \frac{x^{1000}}{1000} + C = \boxed{\frac{1}{100}x^{100} + \frac{2}{1000}x^{1000} + C}$$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{4}$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{4}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \boxed{\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + C}$$

6. MathemaTrick 2. Wie lauten diese unbestimmten Integrale? Lösungsvideo

(a) $\int 4x^6 \,\mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$\int 4x^6 \,\mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{x^7}{7} + C = \boxed{\tfrac{4}{7}x^7 + C}$$

(b) $\int \left(x^2 + 2x - 7\right) \mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$\int \left(x^2 + 2x - 7\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 7x + C = \boxed{\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 7x + C}$$

(c) $\int \left(8ax^4 + \frac{1}{7}x^3\right) \mathrm{d}x$

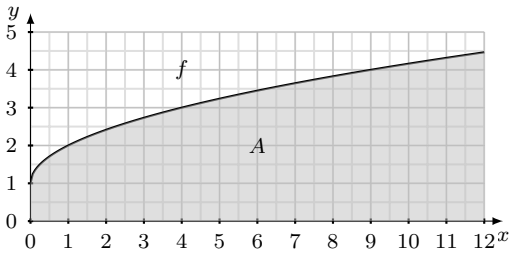
Lösung: Stammfunktion bestimmen:

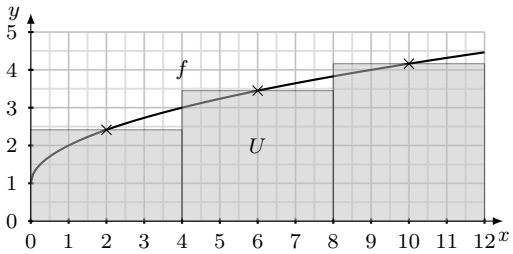
$$\int \left(8ax^4 + \tfrac{1}{7}x^3\right) \mathrm{d}x = 8a \cdot \frac{x^5}{5} + \tfrac{1}{7} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \boxed{\tfrac{8}{5}ax^5 + \tfrac{1}{28}x^4 + C}$$

7. Fläche zwischen Graph und x-Achse. Gegeben ist eine Funktion f. Der Inhalt A der Fläche, die auf dem Intervall $[0, 12]$ zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt, kann durch den folgenden Term näherungsweise berechnet werden:

$$U = (f(2) + f(6) + f(10)) \cdot 4$$

In der Abbildung ist neben dem Graphen von f die Fläche U grau dargestellt.





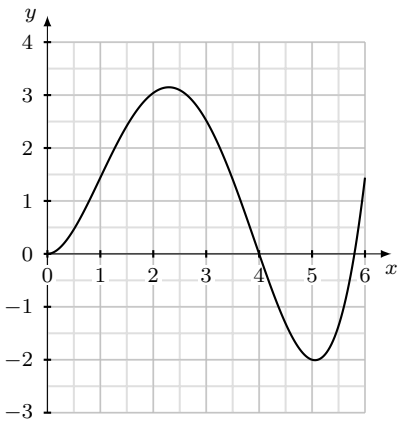
Mit welchen zwei der folgenden Terme wird der Flächeninhalt A genauer als mit dem Ausdruck U angenähert?

- ◯ $(f(0) + f(4) + f(8)) \cdot 4$
- √ $(f(1.5) + f(4.5) + f(7.5) + f(10.5)) \cdot 3$
- √ $\int_0^{12} f(x)\,\mathrm{d}x$
- ◯ $f(6) \cdot 12$
- ◯ $f(12) \cdot 4$

8. Aussagen über bestimmte Integrale. In der Abbildung ist der Graph der Funktion f im Intervall $[0; 6]$ dargestellt.

Welche zwei der folgenden Aussagen sind korrekt?

- √ $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x > \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$
- √ $\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x > \int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x$
- ◯ $\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x > \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$
- ◯ $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- ◯ $\int_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x > 0$



Hinweis: Wenn du das Berechnen des bestimmten Integrals genügend geübt hast, reicht es bei diesen Aufgaben, die Stammfunktion zu bestimmen.

9. Polynomfunktionen.

(a) $\int_0^2 4x^3 \,\mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int 4x^3 \,\mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{x^4}{4} + C = \boxed{x^4 + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = 0^4 \qquad F(2) = 2^4 = 16$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_0^2 4x^3 \,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = 16 - 0 = \boxed{16}$$

(b) $\int_2^4 \frac{1}{5}x^3 \,\mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \tfrac{1}{5}x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \boxed{\tfrac{1}{20}x^4 + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(2) = \tfrac{1}{20}2^4 = 0.8$$
$$F(4) = \tfrac{1}{20}4^4 = 12.8$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_2^4 \tfrac{1}{5}x^3 \,\mathrm{d}x = F(4) - F(2) = 12.8 - 0.8 = \boxed{12}$$

(c) $\int_{-1}^2 \left(x^2 + 3\right) \mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \left(x^2 + 3\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 3x + C = \boxed{\tfrac{1}{3}x^3 + 3x + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(-1) = \tfrac{1}{3}(-1)^3 + 3 \cdot (-1) = \tfrac{-1}{3} - 3 = \tfrac{-10}{3}$$
$$F(2) = \tfrac{1}{3}2^3 + 3 \cdot 2 = \tfrac{8}{3} + 6 = \tfrac{26}{3}$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_{-1}^{2} \left(x^2+3\right) \mathrm{d}x = F(2) - F(-1) = \tfrac{26}{3} - \tfrac{-10}{3} = \tfrac{36}{3} = \boxed{12}$$

(d) $\int_{3}^{5} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) \mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \left(\tfrac{1}{2}x - 2\right) \mathrm{d}x = \boxed{\tfrac{1}{4}x^2 - 2x + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(3) = \tfrac{1}{4}3^2 - 2 \cdot 3 = \tfrac{9}{4} - 6 = -3.75$$
$$F(5) = \tfrac{1}{4}5^2 - 2 \cdot 5 = \tfrac{25}{4} - 10 = -3.75$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_{3}^{5} \left(\tfrac{1}{2}x - 2\right) \mathrm{d}x = F(5) - F(3) = -3.75 - (-3.75) = \boxed{0}$$

(e) $\int_{0}^{3} 2x(1-x) \, \mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int 2x(1-x) \, \mathrm{d}x = \int \left(2x - 2x^2\right) \mathrm{d}x = \boxed{x^2 - \tfrac{2}{3}x^3 + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = 0^2 - \tfrac{2}{3}0^3 = 0 - 0 = 0$$
$$F(3) = 3^2 - \tfrac{2}{3}3^3 = 9 - 18 = -9$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_{0}^{3} 2x(1-x) \, \mathrm{d}x = F(3) - F(0) = -9 - 0 = \boxed{-9}$$

(f) $\int_{-3}^{3} (x-1)^2 \, \mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int (x-1)^2 \, \mathrm{d}x = \int \left(x^2 - 2x + 1\right) \mathrm{d}x = \boxed{\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(-3) = \tfrac{1}{3}(-3)^3 - (-3)^2 + (-3) = -9 - 9 - 3 = -21$$
$$F(3) = \tfrac{1}{3}3^3 - 3^2 + 3 = 9 - 9 + 3 = 3$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_{-3}^{3} (x-1)^2 \,\mathrm{d}x = F(3) - F(-3) = 3 - (-21) = \boxed{24}$$

10. Gebrochenrationale Funktionen.

(a) $\int_{2}^{4} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{-1}{x} + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(2) = \tfrac{-1}{2}$$
$$F(4) = \tfrac{-1}{4}$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_{2}^{4} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = F(4) - F(2) = \tfrac{-1}{4} - \tfrac{-1}{2} = \boxed{\tfrac{1}{4}}$$

(b) $\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} \frac{3}{x^5} \,\mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \frac{3}{x^5} \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{-3}{4x^4} + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(-1) = \frac{-3}{4 \cdot (-1)^4} = -0.75$$
$$F(-0.5) = \frac{-3}{4 \cdot (-0.5)^4} = -12$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_{-1}^{-0.5} \frac{3}{x^5} \,\mathrm{d}x = F(-0.5) - F(-1) = -12 - (-0.75) = \boxed{-11.25}$$

(c) $\int_{1}^{2} \left(2x - \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \left(2x - \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x = \boxed{x^2 - 2\ln|x| + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(1) = 1 - 2 \cdot \ln(1) = 1$$
$$F(2) = 4 - 2 \cdot \ln(2)$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_1^2 \left(2x - \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x = F(2) - F(1) = 4 - 2\ln(2) - 1 = \boxed{3 - 2\ln(2) \approx 1.614}$$

(d) $\displaystyle\int_1^3 \left(4x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \left(4x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \boxed{2x^2 - 3\ln|x| - \frac{2}{x} + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(1) = 2 - 3\ln(1) - 2 = 0$$
$$F(3) = 2 \cdot 3^2 - 3\ln(3) - \tfrac{2}{3} = 18 - 3\ln(3) - \tfrac{2}{3} = \tfrac{52}{3} - 3\ln(3)$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_1^3 \left(4x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \mathrm{d}x = F(3) - F(1) = \boxed{\tfrac{52}{3} - 3\ln(3) \approx 14.04}$$

(e) $\displaystyle\int_3^5 \frac{x-2}{x} \mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \frac{x-2}{x} \mathrm{d}x = \boxed{x - 2\ln|x| + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(3) = 3 - 2\ln(3)$$
$$F(5) = 5 - 2\ln(5)$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_3^5 \frac{x-2}{x} \mathrm{d}x = F(5) - F(3) = 5 - 2\ln(5) - (3 - 2\ln(3)) = \boxed{2 - 2\ln\left(\tfrac{5}{3}\right) \approx 0.9783}$$

(f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2 + 4x + 3}{x} \mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \frac{x^2 + 4x + 3}{x} \mathrm{d}x = \boxed{\tfrac{1}{2}x^2 + 4x + 3\ln|x| + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(3) = 4.5 + 12 + 3\ln(3) = 16.5 + 3\ln(3)$$
$$F(2) = 2 + 8 + 3\ln(2) = 10 + 3\ln(2)$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_2^3 \frac{x^2+4x+3}{x}\,\mathrm{d}x = F(3) - F(2) = 16.5 + 3\ln(3) - (10 + 3\ln(2)) = \boxed{6.5 + 3\ln(1.5) \approx 7.716}$$

11. Wurzelfunktionen.

(a) $\int_1^4 3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int 3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int 3x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 3 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \boxed{2x^{\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{x^3} + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(1) = 2 \cdot \sqrt{1^3} = 2 \cdot 1 = 2$$
$$F(4) = 2 \cdot \sqrt{4^3} = 2 \cdot 8 = 16$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_1^4 3\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = F(4) - F(1) = 16 - 2 = \boxed{14}$$

(b) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{-1}{2}}\,\mathrm{d}x = \boxed{2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(1) = 2 \cdot \sqrt{1} = 2 \cdot 1 = 2$$
$$F(4) = 2 \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = F(4) - F(1) = 4 - 2 = \boxed{2}$$

(c) $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\tfrac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}} + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = \tfrac{3}{4}\cdot 0^{\frac{4}{3}} = 0$$
$$F(8) = \tfrac{3}{4}\cdot 8^{\frac{4}{3}} = \tfrac{3}{4}\cdot 16 = 12$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = F(8) - F(0) = 12 - 0 = \boxed{12}$$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x\cdot x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\tfrac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}} + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = \tfrac{2}{5}\cdot 0^{\frac{5}{2}} = 0$$
$$F(1) = \tfrac{2}{5}\cdot 1^{\frac{5}{2}} = \tfrac{2}{5}\cdot 1 = \tfrac{2}{5}$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \tfrac{2}{5} - 0 = \boxed{\tfrac{2}{5} = 0.4}$$

(e) $\displaystyle\int_1^4 \left(2x + 6\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \left(2x + 6\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \int \left(2x + 6x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x = 2\cdot\tfrac{1}{2}x^2 + 6\cdot\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \boxed{x^2 + 4x^{\frac{3}{2}} + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(1) = 1^2 + 4\cdot 1^{\frac{3}{2}} = 1 + 4\cdot 1 = 5$$
$$F(4) = 4^2 + 4\cdot 4^{\frac{3}{2}} = 16 + 4\cdot 8 = 48$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_1^4 \left(2x + 6\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = F(4) - F(1) = 48 - 5 = \boxed{43}$$

(f) $\int_1^4 \sqrt{\frac{3}{x^3}}\,\mathrm{d}x$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \sqrt{\frac{3}{x^3}}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{3}\cdot x^{\frac{-3}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\cdot\tfrac{-2}{1}\cdot x^{\frac{-1}{2}} = \boxed{-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(1) = -2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}} = -2\sqrt{3}$$
$$F(4) = -2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}} = -2\sqrt{3}\cdot\tfrac{1}{2} = -\sqrt{3}$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{3}{x^3}}\,\mathrm{d}x = F(4) - F(1) = -\sqrt{3} - \left(-2\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \boxed{\sqrt{3} \approx 1.732}$$

12. Winkelfunktionen. Hinweis: Für die Berechnung von Werten von Winkelfunktionen muss auf dem Taschenrechner die Einheit Radiant (RAD) gewählt werden.

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(t) = \int \sin(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{-\cos(t) + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = -1$$
$$F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t = F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0 - (-1) = \boxed{1}$$

(b) $\int_\pi^{2\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(t) = \int \cos(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{\sin(t) + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(\pi) = 0$$
$$F(2\pi) = 0$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t = F(2\pi) - F(\pi) = 0 - 0 = \boxed{0}$$

(c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} -2\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(t) = \int -2\sin(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{2\cos(t) + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = 2 \cdot 1 = 2$$
$$F\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} -2\sin(t)\,\mathrm{d}t = F\left(\tfrac{\pi}{3}\right) - F(0) = 1 - 2 = \boxed{-1}$$

(d) $\int_{0}^{\pi} (4\sin(t) - 3\cos(t))\,\mathrm{d}t$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(t) = \int (4\sin(t) - 3\cos(t))\,\mathrm{d}t = \boxed{-4\cos(t) - 3\sin(t) + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = -4\cos(0) - 3\sin(0) = -4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = -4$$
$$F(\pi) = -4\cos(\pi) - 3\sin(\pi) = -4 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 = 4$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_{0}^{\pi} (4\sin(t) - 3\cos(t))\,\mathrm{d}t = F(\pi) - F(0) = 4 - (-4) = \boxed{8}$$

(e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(t) = \int \frac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \boxed{\tan(t) + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = \tan(0) = 0$$
$$F\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = 1$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = F\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - F(0) = 1 - 0 = \boxed{1}$$

(f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(t)\,\mathrm{d}t$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(t) = \int \tan(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{-\ln|\cos(t)| + C}$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = -\ln\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$F\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = -\ln\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(t)\,\mathrm{d}t = F\left(\tfrac{\pi}{3}\right) - F\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \ln\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \boxed{\ln\left(\sqrt{2}\right) = \tfrac{1}{2}\ln(2) \approx 0.3466}$$

13. MathemaTrick Parameter 1. Wie lautet der Parameter a? Lösungsvideo

(a) $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2 + ax\right)\mathrm{d}x = 8$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \left(x^2 + ax\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{a}{2}x^2 + C$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = 0$$
$$F(2) = \tfrac{8}{3} + 2a$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_0^2 \left(x^2 + ax\right)\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = \tfrac{8}{3} + 2a$$

Gleichung nach a auflösen:

$$\begin{array}{rl|l} \frac{8}{3} + 2a = 8 & & -\frac{8}{3} \\ 2a = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} & & \cdot\frac{1}{2} \\ a = \boxed{\frac{8}{3}} & & \end{array}$$

(b) $\int_1^2 \left(x^2+a\right) \mathrm{d}x = 2$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \left(x^2+a\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 + ax + C$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(1) = \tfrac{1}{3} + a$$
$$F(2) = \tfrac{8}{3} + 2a$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_1^2 \left(x^2+a\right) \mathrm{d}x = F(2) - F(1) = \left(\tfrac{8}{3}+2a\right) - \left(\tfrac{1}{3}+a\right) = \tfrac{7}{3} + a$$

Gleichung nach a auflösen:

$$\begin{aligned} \tfrac{7}{3} + a &= 2 \qquad \Big| \quad -\tfrac{7}{3} \\ a &= 2 - \tfrac{7}{3} = \boxed{\tfrac{-1}{3}} \end{aligned}$$

14. MathemaTrick Parameter 2. Welchen Wert muss $b > 0$ haben, damit die Gleichung korrekt ist? Lösungsvideo

$$\int_0^b \left(x^2-3\right) \mathrm{d}x = 0$$

Lösung: Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int \left(x^2-3\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}x^3 - 3x + C$$

Stammfunktion an Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(0) = 0$$
$$F(b) = \tfrac{1}{3}b^3 - 3b$$

Bestimmtes Integral berechnen:

$$\int_0^b \left(x^2-3\right) \mathrm{d}x = F(b) - F(0) = \left(\tfrac{1}{3}b^3 - 3b\right) - 0 = \tfrac{1}{3}b^3 - 3b$$

Gleichung nach b auflösen:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}b^3 - 3b &= 0 \qquad \Big| \quad \text{ausklammern} \\ b \cdot \left(\tfrac{1}{3}b^2 - 3\right) &= 0 \\ b = 0 \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{3}b^2 &= 3 \qquad \Big| \quad \cdot 3 \\ b = 0 \quad \text{oder} \quad b^2 &= 9 \qquad \Big| \quad \text{Wurzel ziehen} \\ b = 0 \quad \text{oder} \quad b &= \pm 3 \end{aligned}$$

Da $b > 0$ ist, gilt $\boxed{b = 3}$.