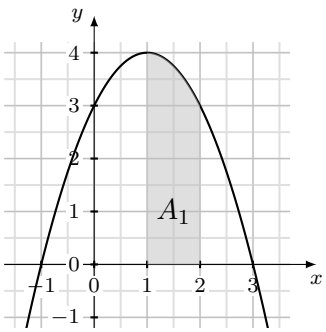
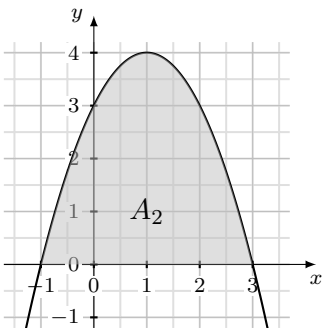
Flächenberechnungen

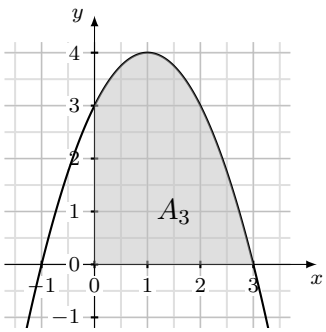
1. **Repetition 1.** Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
   (a) Wie gross ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[1, 2]$?
   (b) Wie gross ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse?
   (c) Wie gross ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und den positiven Koordinatenachsen?



(a)



(b)



(c)

Lösung: Zunächst wird die Stammfunktion bestimmt:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{-1}{3}x^3 + x^2 + 3x + C$$

(a) Hier sind die Integrationsgrenzen bekannt. Die Werte der Stammfunktion an den Grenzen werden bestimmt:

$$F(1) = \tfrac{-1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 + 3 \cdot 1 = \tfrac{11}{3}$$
$$F(2) = \tfrac{-1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 + 3 \cdot 2 = \tfrac{22}{3}$$

Jetzt kann das bestimmte Integral berechnet werden:

$$A_1 = \left| \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \right| = |F(2) - F(1)| = \left| \tfrac{22}{3} - \tfrac{11}{3} \right| = \tfrac{11}{3}$$

(b) Hier müssen die Integrationsgrenzen bestimmt werden. Es sind die Nullstellen:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 = 0$$

Diese werden z.B. mit der Lösungsformel bestimmt:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$$

Nun sind die Integrationsgrenzen bekannt, es können die Werte der Stammfunktion berechnet werden:

$$F(-1) = \tfrac{-1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = \tfrac{-5}{3}$$
$$F(3) = \tfrac{-1}{3} \cdot 3^3 + 3^2 + 3 \cdot 3 = 9$$

Jetzt kann das bestimmte Integral berechnet werden:

$$A_2 = \left| \int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = |F(3) - F(-1)| = \left|9 - \tfrac{-5}{3}\right| = \tfrac{32}{3}$$

(c) Hier ist die linke Integrationsgrenze $x = 0$, da sich dort die y-Achse befindet. Die rechte Integrationsgrenze ist die erste positive Nullstelle, hier $x = 3$.

$$F(0) = 0 \qquad\qquad F(3) = 9$$

Jetzt kann das bestimmte Integral berechnet werden:

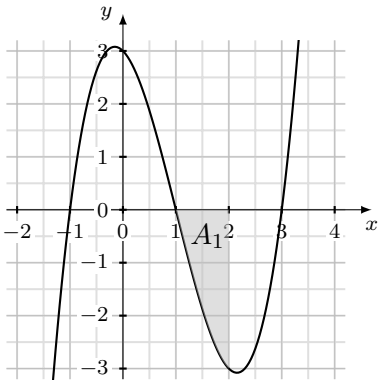
$$A_3 = \left| \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = |F(3) - F(0)| = |9 - 0| = 9$$

2. Repetition 2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = \left(x^2 - 1\right)(x - 3)$.

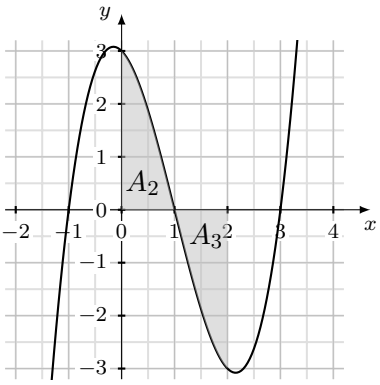
(a) Wie gross ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[1, 2]$?

(b) Wie gross ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[0, 2]$?

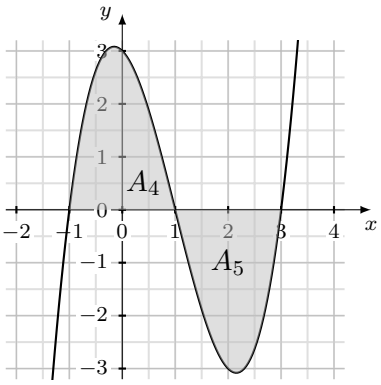
(c) Wie gross ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse?



(a)



(b)



(c)

Lösung: Zunächst wird die Stammfunktion bestimmt:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

(a) Hier sind die Integrationsgrenzen bekannt. Die Werte der Stammfunktion an den Grenzen werden bestimmt:

$$F(1) = \tfrac{1}{4} \cdot 1^4 - 1^3 - \tfrac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = \tfrac{7}{4}$$
$$F(2) = \tfrac{1}{4} \cdot 2^4 - 2^3 - \tfrac{1}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 0$$

Jetzt kann das bestimmte Integral berechnet werden. Hier ist es wichtig, dass der **Betrag** des Integrals verwendet wird, da das Integral negativ ist, eine Fläche jedoch

immer positiv ist.

$$A_1 = \left| \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \right| = |F(2) - F(1)| = \left|0 - \tfrac{7}{4}\right| = \left|\tfrac{-7}{4}\right| = \tfrac{7}{4}$$

(b) Das bestimmte Integral über dem ganzen Intervall ergibt das Resultat 0, da sich die beiden Stücke A_2 und A_3 gegenseitig aufheben. Um die Fläche zu berechnen, muss deshalb das Intervall bei der Nullstelle aufgeteilt werden.

Die Nullstellen werden ausgehend von der faktorisierten Darstellung der Funktionsgleichung mit dem Satz des Nullprodukts bestimmt.

$$0 = \left(x^2 - 1\right)(x - 3) = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$$

Die Nullstellen lauten also

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 3$$

Also muss das Intervall bei $x = 1$ unterteilt werden.

$$F(0) = 0 \qquad F(1) = \tfrac{7}{4} \qquad F(2) = 0$$

Nun wird die Fläche berechnet:

$$\begin{aligned} A_2 + A_3 &= \left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &= |F(1) - F(0)| + |F(2) - F(1)| \\ &= \left|\tfrac{7}{4} - 0\right| + \left|0 - \tfrac{7}{4}\right| = \tfrac{7}{4} + \tfrac{7}{4} = 3.5 \end{aligned}$$

(c) Hier werden die beiden Intervalle $[-1, 1]$ und $[1, 3]$ verwendet, welche durch die Nullstellen aus der vorherigen Aufgabe gebildet werden.

Die Werte der Stammfunktion an den Grenzen werden bestimmt:

$$F(-1) = \tfrac{-9}{4} \qquad F(1) = \tfrac{7}{4} \qquad F(3) = \tfrac{-9}{4}$$

Nun wird die Fläche berechnet:

$$\begin{aligned} A_4 + A_5 &= \left| \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \right| \\ &= |F(1) - F(-1)| + |F(3) - F(1)| \\ &= \left|\tfrac{7}{4} - \tfrac{-9}{4}\right| + \left|\tfrac{-9}{4} - \tfrac{7}{4}\right| = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

3. Sinus. Wie gross ist die Fläche, die der Graph der Funktion $f(x) = \sin(x) + 1$ mit der x-Achse auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ einschliesst?

Lösung:



Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int (\sin(x) + 1)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + x + C$$

Werte der Stammfunktion an den Grenzen berechnen:

$$F(2\pi) = -\cos(2\pi) + 2\pi = -1 + 2\pi$$
$$F(0) = -\cos(0) + 0 = -1$$

Fläche berechnen:

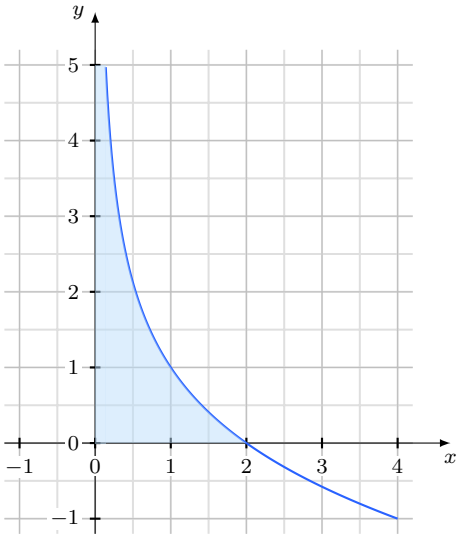
$$A = \left| \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \right| = |F(2\pi) - F(0)| = |-1 + 2\pi - (-1)| = \boxed{2\pi \approx 6.283}$$

4. Wurzelfunktion. Gegeben ist die folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{2 - x}{\sqrt{x}}$$

(a) Skizziere den Graphen der Funktion im nebenstehenden Koordinatensystem.

(b) Wie gross ist die Fläche, welche zwischen dem Graphen und den beiden Koordinatenachsen liegt?



Lösung: Nullstelle bestimmen:

$$\begin{array}{rl|l} f(x) = 0 & & \text{einsetzen} \\ \frac{2-x}{\sqrt{x}} = 0 & & \cdot\sqrt{x} \\ 2 - x = 0 & & +x \\ 2 = x & & \end{array}$$

Die Nullstelle liegt bei $x = 2$.

Bestimmung der Stammfunktion mit Potenzgesetz:

$$f(x) = 2x^{\frac{-1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = 4x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

Berechnung der Werte der Stammfunktion:

$$F(2) = 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} - \tfrac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\sqrt{8} = 4\sqrt{2} - \tfrac{4}{3}\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}$$
$$F(0) = 0 - 0 = 0$$

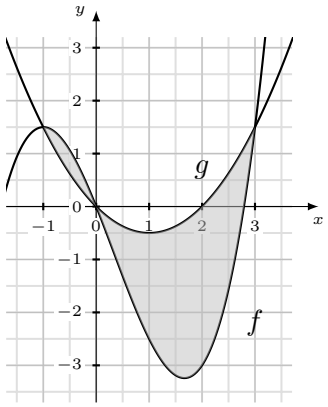
Berechnung der Fläche mit dem bestimmten Integral:

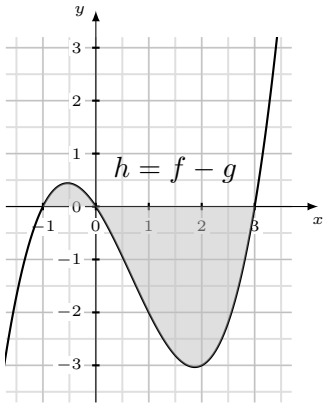
$$A = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = \tfrac{8}{3}\sqrt{2} \approx 3.771$$

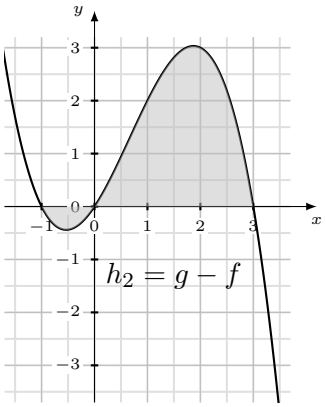
5. **Repetition 3.** Gegeben sind die folgenden Funktionen:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{5}{2}x \qquad\qquad g(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - x$$

Wie gross ist die Fläche zwischen den Graphen von f und g?







Lösung: Wenn zwei Funktionen gegeben sind, ist es meistens eine Vereinfachung, wenn die Differenz der beiden Funktionen betrachtet wird, also die Funktion

$$h(x) = f(x) - g(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{5}{2}x - \left(\tfrac{1}{2}x^2 - x\right) = \tfrac{1}{2}x^3 - x^2 - \tfrac{3}{2}x$$

Alternativ kann auch die Funktion $h_2(x) = g(x) - f(x)$ betrachtet werden. h_2 ist das Spiegelbild von h bezüglich der x-Achse und hat somit die gleichen Nullstellen und dem Betrag nach die gleichen Flächeninhalte.

Die Nullstellen von h (Schnittpunkte von f und g) werden bestimmt:

$$0.5x^3 - x^2 - 1.5x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x\left(0.5x^2 - x - 1.5\right) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $x = 0$ eine Nullstelle. Die anderen Nullstellen ergeben sich aus:

$$0.5x^2 - x - 1.5 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - 2x - 3 = 0$$

Diese Gleichung kann mit dem Zweiklammeransatz gelöst werden:

$$(x-3)(x+1) = 0$$

Daraus ergeben sich die Nullstellen $x = -1$ und $x = 3$. Alternativ kann die Lösungsformel verwendet werden.

Als nächstes wird die Stammfunktion von h ermittelt:

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 + C$$

Nun werden die Werte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen berechnet:

$$\begin{aligned} H(-1) &= \tfrac{1}{8}\cdot 1 - \tfrac{1}{3}\cdot(-1) - \tfrac{3}{4}\cdot 1 = \tfrac{-7}{24} \\ H(0) &= 0 \\ H(3) &= \tfrac{1}{8}\cdot 81 - \tfrac{1}{3}\cdot 27 - \tfrac{3}{4}\cdot 9 = \tfrac{-135}{24} \end{aligned}$$

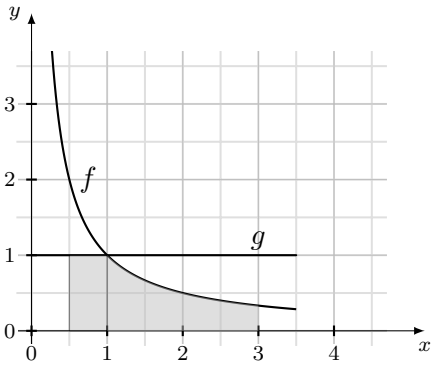
Jetzt wird die Fläche stückweise berechnet:

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{-1}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{3} h(x)\,\mathrm{d}x\right| = |H(3) - H(0)| + |H(0) - H(-1)| \\ &= \left|\tfrac{-135}{24} - 0\right| + \left|0 - \left(\tfrac{-7}{24}\right)\right| = \tfrac{135}{24} + \tfrac{7}{24} = \tfrac{142}{24} = \boxed{\tfrac{71}{12} = 5.91\overline{6}} \end{aligned}$$

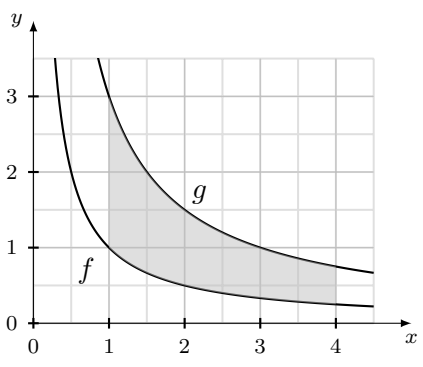
Die Fläche zwischen f und g beträgt $\frac{71}{12}$.

6. Gebrochenrationale Funktionen. Welchen Inhalt hat die graue Fläche?

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = 1$



(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = \frac{3}{x}$



Lösung:

(a) Zuerst wird die Differenzfunktion bestimmt:

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - 1$$

Die Nullstelle von h ist $x = 1$: Nachweis:

$$h(1) = \frac{1}{1} - 1 = 0$$

Die Stammfunktion von h wird bestimmt:

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \ln(x) - x + C$$

Die Werte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen werden berechnet:

$$\begin{aligned} H(0.5) &= \ln(0.5) - 0.5 \\ H(1) &= \ln(1) - 1 = -1 \\ H(3) &= \ln(3) - 3 \end{aligned}$$

Nun wird die Fläche zwischen f und g auf dem Intervall $[0.5, 3]$ berechnet. Da die Nullstelle dazwischen liegt, muss dort das Integral aufgeteilt werden, also:

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{0.5}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{1}^{3} h(x)\,\mathrm{d}x\right| = |H(1) - H(0.5)| + |H(3) - H(1)| \\ &= |-1 - (\ln(0.5) - 0.5)| + |\ln(3) - 3 - (-1)| \\ &= |-0.5 - \ln(0.5)| + |\ln(3) - 2| \approx |0.1931| + |-0.9014| = 1.095 \end{aligned}$$

Die Fläche beträgt ungefähr $\boxed{1.095}$.

(b) Zuerst wird die Differenzfunktion $h(x)$ bestimmt:

$$h(x) = g(x) - f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x}$$

Die Stammfunktion von $h(x)$ wird bestimmt:

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \ln(x) - \ln(x) + C = 2 \cdot \ln(x) + C$$

Die Werte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen werden berechnet:

$$H(4) = 2 \cdot \ln(4) H(1) \qquad = 2 \cdot \ln(1) = 0$$

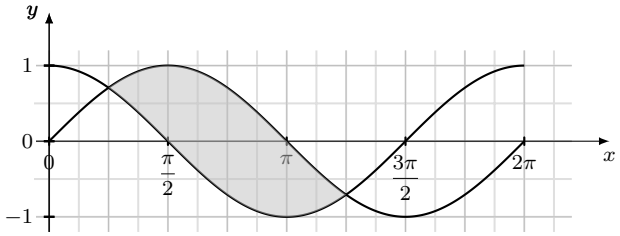
Die Fläche wird berechnet:

$$A = \left|\int_{1}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x\right| = |H(4) - H(1)| = |2 \cdot \ln(4) - 0| = 2 \cdot \ln(4) \approx 2.773$$

Die Fläche beträgt ungefähr $\boxed{2.773}$.

7. Winkelfunktionen. Welchen Inhalt hat das abgebildete Flächenstück, welches von den

Graphen der Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ eingeschlossen wird?



Lösung: Differenzfunktion bestimmen:

$$h(x) = g(x) - f(x) = \cos(x) - \sin(x)$$

Nullstellen (Schnittpunkte) bestimmen. Die befinden sich dort, wo $\sin(x) = \cos(x)$ ist. Das ist bei 45°, also bei $\frac{\pi}{4}$ der Fall, sowie bei $180° + 45° = 225°$, also bei $\frac{5\pi}{4}$.

Stammfunktion bestimmen:

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + \cos(x) + C$$

Werte der Stammfunktion an den Grenzen bestimmen:

$$H\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$
$$H\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

Fläche berechnen

$$A = \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} h(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|H\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) - H\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right| = \left|-\sqrt{2} - \sqrt{2}\right| = \boxed{2\sqrt{2}}$$

8. **Vermischte Funktionen.** Welchen Inhalt hat die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f und g auf dem angegebenen Intervall?

(a) $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + 2 \qquad g(x) = x - 1 \qquad [-1, 2]$

Lösung: Die Differenzfunktion lautet

$$h(x) = f(x) - g(x) = \tfrac{1}{10}x^2 + 2 - (x - 1) = \tfrac{1}{10}x^2 - x + 3$$

Die Stammfunktion lautet

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{30}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

Die Werte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen sind:

$$H(-1) = \tfrac{1}{30}\cdot(-1)^3 - \tfrac{1}{2}\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) = \tfrac{-1}{30} - \tfrac{1}{2} - 3 = \tfrac{-106}{30} = \tfrac{-53}{15}$$
$$H(2) = \tfrac{1}{30}\cdot 2^3 - \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 + 3\cdot 2 = \tfrac{8}{30} - 2 + 6 = \tfrac{128}{30} = \tfrac{64}{15}$$

Die Fläche beträgt:

$$A = \left| \int_{-1}^{2} h(x)\,\mathrm{d}x \right| = |H(2) - H(-1)| = \left|\tfrac{64}{15} - \left(\tfrac{-53}{15}\right)\right| = \tfrac{117}{15} = \boxed{7.8}$$

(b) $f(x) = \ln(x) \qquad g(x) = \dfrac{1}{x} \qquad [\mathrm{e}, 5]$

Lösung: Die Differenzfunktion lautet

$$h(x) = g(x) - f(x) = \tfrac{1}{x} - \ln(x)$$

Die Stammfunktion lautet

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \ln(x) - x\ln(x) + x + C$$

Die Werte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen sind:

$$H(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e}\cdot\ln(\mathrm{e}) + \mathrm{e} = 1 - \mathrm{e} + \mathrm{e} = 1$$
$$H(5) = \ln(5) - 5\cdot\ln(5) + 5$$

Die Fläche beträgt:

$$A = \left| \int_{\mathrm{e}}^{5} h(x)\,\mathrm{d}x \right| = |H(5) - H(\mathrm{e})| = |\ln(5) - 5\cdot\ln(5) + 5 - 1| \approx \boxed{2.438}$$

(c) $f(x) = \sqrt{x+2} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{\frac{-x}{5}} \qquad [0, 4]$

Lösung: Da $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{2} > 1 \geq \mathrm{e}^{\frac{-x}{5}}$ gilt, verläuft f auf dem ganzen Intervall oberhalb von g. Die Differenzfunktion lautet

$$h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+2} - \mathrm{e}^{\frac{-x}{5}}$$

Die Stammfunktion lautet

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + 5\mathrm{e}^{\frac{-x}{5}} + C$$

Die Werte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen sind:

$$H(4) = \tfrac{2}{3}\cdot 6^{\frac{3}{2}} + 5\mathrm{e}^{\frac{-4}{5}} = 4\sqrt{6} + 5\mathrm{e}^{\frac{-4}{5}}$$
$$H(0) = \tfrac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} + 5\mathrm{e}^{0} = \tfrac{4\sqrt{2}}{3} + 5$$

Die Fläche beträgt:

$$A = \left| \int_{0}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x \right| = |H(4) - H(0)| = |4\sqrt{6} + 5\mathrm{e}^{\frac{-4}{5}} - \left(\tfrac{4\sqrt{2}}{3} + 5\right)| = 4\sqrt{6} + 5\mathrm{e}^{\frac{-4}{5}} - \tfrac{4\sqrt{2}}{3} - 5 \approx \boxed{5.159}$$

(d) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2} \qquad g(x) = x^2 \qquad [-4, -2]$

Lösung: Da $x^2 \geq 4 > 0 \geq \frac{-1}{x^2}$ gilt, verläuft g auf dem ganzen Intervall oberhalb von f. Die Differenzfunktion lautet

$$h(x) = g(x) - f(x) = x^2 - \frac{-1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Die Stammfunktion lautet

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + C$$

Die Werte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen sind:

$$H(-2) = \frac{1}{3} \cdot (-8) - \frac{1}{-2} = \frac{-8}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-13}{6}$$
$$H(-4) = \frac{1}{3} \cdot (-64) - \frac{1}{-4} = \frac{-64}{3} + \frac{1}{4} = \frac{-253}{12}$$

Die Fläche beträgt:

$$A = \left| \int_{-4}^{-2} h(x)\,\mathrm{d}x \right| = |H(-2) - H(-4)| = |\frac{-13}{6} - \frac{-253}{12}| = \frac{227}{12} \approx \boxed{18.92}$$