Musterprobe Analysis

Zeit: 90 Minuten, Hilfsmittel: Taschenrechner und Fundamentum

Aufgabe	1	2	3	4	Total	Note
max. Punkte	9	8	8	15	40	
Punkte						

1. **Ableitungsregeln.** Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen. Gib jeweils an, welche Ableitungsregel du hauptsächlich verwendest. **(9P)**

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ (3P)

   Lösung: Hier wird die Quotientenregel (**1P**) verwendet:

   $$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a' \cdot b - a \cdot b'}{b^2}$$

   Hier angewendet:

   $$a(x) = 1 \qquad a'(x) = 0 \qquad b(x) = 1 + \mathrm{e}^x \qquad b'(x) = \mathrm{e}^x$$

   Einsetzen in die Formel (**1P**) und vereinfachen:

   $$f'(x) = \frac{0 \cdot (1+\mathrm{e}^x) - 1 \cdot \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \boxed{\frac{-\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}}$$

   Korrekte Lösung **1P**.

   (b) $g(x) = \log_3(\cos(x))$ (3P)

   Lösung: Hier wird die Kettenregel (**1P**) verwendet:

   $$(a(b(x)))' = a'(b(x)) \cdot b'(x)$$

   Hier angewendet:

   $$a(\square) = \log_3(\square) \qquad a'(\square) = \frac{1}{\ln(3) \cdot \square} \qquad b(x) = \cos(x) \qquad b'(x) = -\sin(x)$$

   Einsetzen in die Formel und vereinfachen (**1P**):

   $$g'(x) = \frac{1}{\ln(3) \cdot \cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = \boxed{\frac{-\sin(x)}{\cos(x) \cdot \ln(3)}} = \boxed{\frac{-\tan(x)}{\ln(3)}}$$

   Korrekte Lösung **1P**, Bonus (**1P**) für Darstellung mit Tangens.

   (c) $h(x) = \sin(x) \cdot \ln(x)$ (3P)

Lösung: Hier wird die Produktregel (**1P**) verwendet:

$$(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'$$

Hier angewendet:

$$a(x) = \sin(x) \qquad a'(x) = \cos(x) \qquad b(x) = \ln(x) \qquad b'(x) = \tfrac{1}{x}$$

Einsetzen in die Formel und vereinfachen (**1P**):

$$h'(x) = \boxed{\cos(x) \cdot \ln(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{x}} = \boxed{\cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}}$$

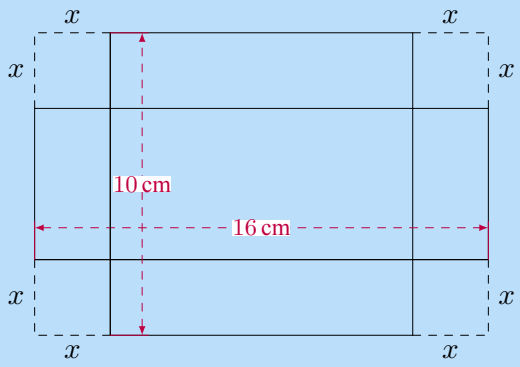
Korrekte Lösung **1P**.

2. Schachtel. Aus einem rechteckigen Stück Karton mit den Seitenlängen 16 cm und 10 cm werden an allen Ecken gleich grosse Quadrate ausgeschnitten. Anschliessend werden die überstehenden Teile nach oben gefaltet, um eine Schachtel zu bilden. (8P)

Wie gross muss die Seitenlänge der Quadrate sein, damit der Inhalt der Schachtel so gross wie möglich wird?

Erstelle eine Skizze, halte deine Vorgehensweise nachvollziehbar fest und antworte mit einem vollständigen Satz.

Lösung:



Zunächst muss eine Formel für das Volumen aufgestellt werden. Das Volumen eines Quaders ist Länge mal Breite mal Höhe, also:

$$\begin{aligned} V(x) &= (16 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x = (16 - 2x) \cdot \left(10x - 2x^2\right) \\ &= 160x - 32x^2 - 20x^2 + 4x^3 = 4x^3 - 52x^2 + 160x \end{aligned}$$

Von dieser Funktion muss ein Hochpunkt gefunden werden. Also wird abgeleitet:

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 \qquad V''(x) = 24x - 104$$

Die Ableitung wird Null gesetzt:

$$\begin{aligned} V'(x) &= 12x^2 - 104x + 160 \\ 0 &= 12x^2 - 104x + 160 \\ 0 &= 3x^2 - 26x + 40 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} V'(x) = 0 \\ :4 \end{array} \right.$$

Die Lösungen werden mit der Lösungsformel ermittelt:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-26) \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 3 \cdot 40}}{2 \cdot 3} = \frac{26 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{26 \pm 14}{6}$$

Damit ergeben sich die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = \frac{20}{3}$. Nun wird mit der zweiten Ableitung überprüft, ob eine dieser Lösungen ein Hochpunkt ist.

$$\begin{aligned} V''(2) &= 24 \cdot 2 - 104 = -56 \\ V''\left(\tfrac{20}{3}\right) &= 24 \cdot \tfrac{20}{3} - 104 = 56 \end{aligned}$$

Die Seitenlänge muss $0 < x < 5$ erfüllen, da $10 - 2x > 0$ sein muss. $x_2 = \frac{20}{3}$ liegt ausserhalb, $x_1 = 2$ innerhalb dieses Intervalls. Für $x = 2$ ist die zweite Ableitung negativ, dies ist also ein Hochpunkt.

Für $\boxed{x = 2\,\text{cm}}$ wird das Volumen maximal.

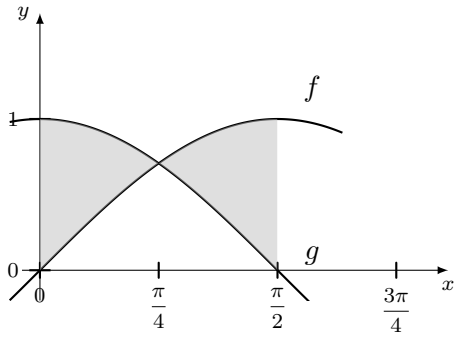
Bewertung:

- Skizze mit Beschriftungen **1P**
- Volumenformel korrekt **1P**
- erste Ableitung korrekt **1P**
- zweite Ableitung korrekt **1P**
- Extrempunkte korrekt ermittelt $(V' = 0)$ **2P**
- Hochpunkt korrekt ermittelt $(V'' < 0)$ **1P**
- Lösungssatz mit korrektem Resultat und Einheit **1P**

3. Fläche. Berechne die Fläche zwischen der Sinus- und der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$. (8P) **(8P)**

$$f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = \cos(x)$$



Lösung: Zunächst wird die Differenzfunktion bestimmt (**1P**):

$$h(x) = g(x) - f(x) = \cos(x) - \sin(x)$$

Bei den Nullstellen von h muss das Intervall unterteilt werden. Eine Nullstelle scheint bei

$x = \frac{\pi}{4}$ zu liegen. Nachweis (**1P**):

$$h\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Nun wird die Stammfunktion von h bestimmt (**1P**):

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + \cos(x) + C$$

Konstante C vorhanden **1P**.

Nun werden die Werte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen bestimmt: (**1P**)

$$\begin{aligned} H(0) &= \sin(0) + \cos(0) = 0 + 1 = 1 \\ H\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \\ H\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Schliesslich wird die Fläche berechnet:

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|H\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - H(0)\right| + \left|H\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - H\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right| \\ &= |\sqrt{2} - 1| + |1 - \sqrt{2}| = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2 = \boxed{2\sqrt{2} - 2 \approx 0.8284} \end{aligned}$$

Schreibweise Integral korrekt: **1P**, Beträge vorhanden **1P**, korrekte Lösung **1P**

4. Maturaufgabe. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$. **(15P)**

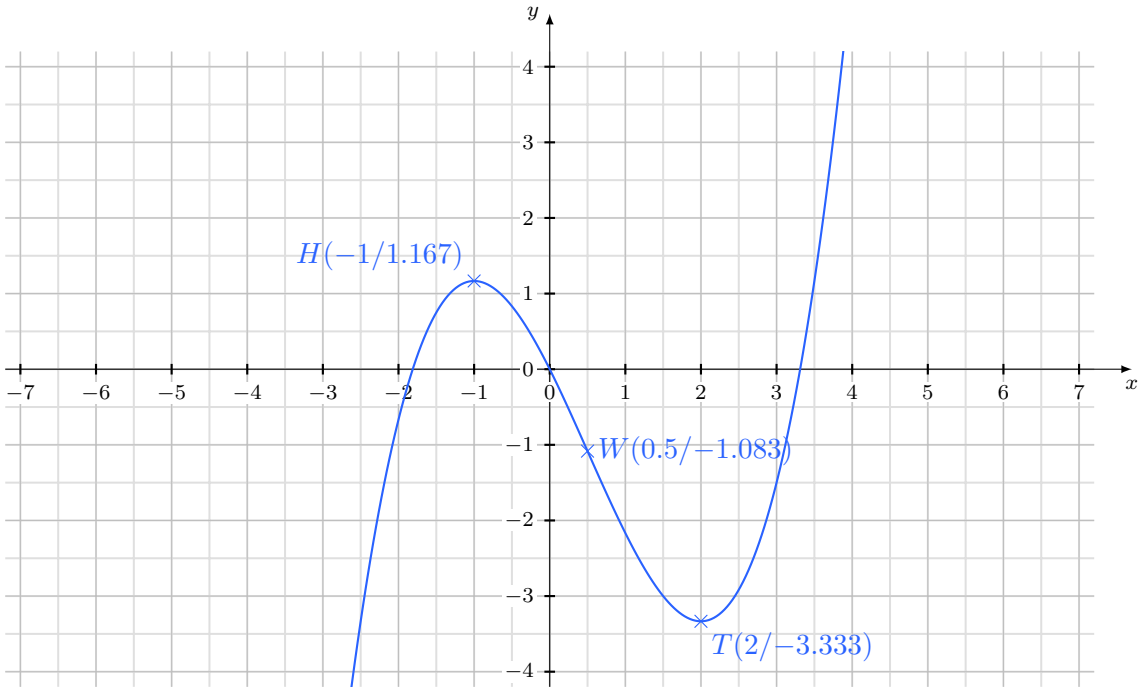
(a) Berechne die Nullstellen von f. (2P)

(b) Bestimme die Hoch- und Tiefpunkte sowie den Wendepunkt von f. (5P)

(c) Zeichne den Graphen von f sowie die oben ermittelten Punkte ins abgebildete Koordinatensystem ein. (3P)

(d) Berechne die Steigung von f an der Stelle $x = 3$. Gib die Gleichung der Tangente t an f an dieser Stelle an. (2P)

(e) Berechne den Inhalt der Fläche, welche durch den Graphen von f und die x-Achse auf dem Intervall $[1, 3]$ begrenzt wird. (3P)



Lösung:

(a) Um die Nullstellen zu bestimmen, lösen wir:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{Funktionsgleichung einsetzen} \\ \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - 2x &= 0 && \cdot 6 \\ 2x^3 - 3x^2 - 12x &= 0 && \text{Faktorisieren} \\ x\left(2x^2 - 3x - 12\right) &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt, dass $x_1 = 0$ eine Nullstelle ist. Die anderen Nullstellen ergeben sich aus dem Lösen der quadratischen Gleichung

$$2x^2 - 3x - 12 = 0$$

Löse mit der Lösungsformel:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 96}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{4}$$

Also sind die Nullstellen:

$$\boxed{x_1 = 0} \qquad \boxed{x_2 \approx -1.812} \qquad \boxed{x_3 \approx 3.312}$$

(b) Zunächst berechne die ersten beiden Ableitungen.

$$f'(x) = x^2 - x - 2 \qquad f''(x) = 2x - 1$$

Hoch- und Tiefpunkte: Setze $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Zweiklammeransatz} \\ (x-2)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen sind $x = -1$ und $x = 2$. Alternativ kann die Gleichung mit der Lösungsformel gelöst werden.

Bestimme Art der Extrempunkte mit der zweiten Ableitung

$$\begin{aligned} x = -1: \quad & f''(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Hochpunkt} \\ x = 2: \quad & f''(2) = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Tiefpunkt} \end{aligned}$$

Berechne die zugehörigen y-Werte:

$$f(-1) = \tfrac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \tfrac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = \tfrac{-1}{3} - \tfrac{1}{2} + 2 = \tfrac{-2}{6} - \tfrac{3}{6} + \tfrac{12}{6} = \tfrac{7}{6}$$

$$f(2) = \tfrac{1}{3} \cdot (8) - \tfrac{1}{2} \cdot (4) - 2 \cdot 2 = \tfrac{8}{3} - 2 - 4 = \tfrac{8}{3} - 6 = \tfrac{8}{3} - \tfrac{18}{3} = \tfrac{-10}{3}$$

Die Koordinaten des Hochpunkts H und Tiefpunkts T lauten:

$$\boxed{H\left(-1/\tfrac{7}{6}\right) \approx H(-1/1.167)} \qquad \boxed{T\left(2/\tfrac{-10}{3}\right) \approx T(2/-3.333)}$$

Wendepunkt: Setze $f''(x) = 0$:

$$2x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}$$

Berechne y-Koordinate:

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{8}\right) - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} - 2 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{8} - 1 = \tfrac{1}{24} - \tfrac{3}{24} - \tfrac{24}{24} = \tfrac{-26}{24} = \tfrac{-13}{12}$$

Die Koordinaten des Wendepunkts W lauten

$$\boxed{W\left(\tfrac{1}{2}/\tfrac{-13}{12}\right) \approx W(0.5/-1.083)}$$

(c) Siehe Diagramm.

(d) Steigung bei $x = 3$:

$$f'(3) = 3^2 - 3 - 2 = 9 - 3 - 2 = 4$$

y-Koordinate bei $x = 3$:

$$f(3) = \tfrac{1}{3} \cdot 3^3 - \tfrac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = 9 - 4.5 - 6 = -1.5$$

Der Punkt lautet $P(3/-1.5)$. Die Tangentengleichung hat die Form:

$$t(x) = 4x + b$$

Einsetzen von P:

$$\begin{array}{rl|l} t(x) = 4x + b & & \text{einsetzen} \\ -1.5 = 4 \cdot 3 + b & & -12 \\ -13.5 = b & & \end{array}$$

Die Tangentengleichung lautet:

$$\boxed{t(x) = 4x - 13.5}$$

(e) Stammfunktion bestimmen:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}x^3 - 2\cdot\tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{12}x^4 - \tfrac{1}{6}x^3 - x^2$$

Werte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen berechnen:

$$F(3) = \tfrac{1}{12}\cdot 81 - \tfrac{1}{6}\cdot 27 - 9 = \tfrac{81}{12} - \tfrac{27}{6} - 9 = \tfrac{81}{12} - \tfrac{54}{12} - \tfrac{108}{12} = \tfrac{-81}{12}$$

$$F(1) = \tfrac{1}{12}\cdot 1 - \tfrac{1}{6}\cdot 1 - 1 = \tfrac{-13}{12}$$

Fläche berechnen:

$$A = \left|\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = |F(3) - F(1)| = \left|\tfrac{-81}{12} - \tfrac{-13}{12}\right| = \left|\tfrac{-68}{12}\right| = \tfrac{17}{3}$$

Der Flächeninhalt beträgt $\boxed{\tfrac{17}{3} = 5.\overline{6}}$.