Grundbegriffe

1. **Würfel.** Ein Würfel wird einmal geworfen.
   (a) Wie lautet der Ergebnisraum Ω?
   (b) Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise?

   A: «Augenzahl ist gerade» C: «Augenzahl ist eine Primzahl»
   B: «Augenzahl ist grösser als 4» D: «Augenzahl ist kleiner als 3»

   (c) Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise? Wie können diese Ereignisse in Worten beschrieben werden?

   $A \cap B$ $C \cup D$ $\overline{B}$ $\overline{A \cup B}$

   (d) Welche der Ereignisse A bis D sind unvereinbar?
   (e) Wie können diese Ereignisse mit Mengenoperationen basierend auf den Ereignissen A bis D beschrieben werden? Wie lauten die Ereignisse als Menge?

   F: «Augenzahl beträgt mindestens 3»
   G: «Augenzahl ist eine gerade Primzahl»

2. **Münzen.** Eine 1-Franken-Münze und ein Fünfliber werden gleichzeitig geworfen. Bei den Ergebnissen steht der erste Buchstabe für die 1-Franken-Münze, der zweite für den Fünfliber, K für Kopf und Z für Zahl.
   (a) Wie lautet der Ergebnisraum Ω?
   (b) Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise?

   A: «Beide Münzen zeigen Kopf.»
   B: «Mindestens einmal zeigt sich Zahl.»
   C: «Beide Münzen zeigen dasselbe.»
   D: «Die 1-Franken-Münze zeigt Zahl.»

   (c) Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise? Wie können diese Ereignisse in Worten beschrieben werden?

   $A \cap B$ $A \cap D$ $B \cap C$ $A \cup C$ $C \cup D$

   (d) Welche der vier Ereignisse sind unvereinbar und wieso?
   (e) Welche zwei der vier Ereignisse A bis D sind Gegenereignisse voneinander? Wie lauten die Gegenereignisse der anderen zwei Ereignisse?

3. **Jassen.** Aus einem gemischten Jassstock wird eine Karte gezogen. Ein Jassstock hat 36 Karten in vier Farben: Ecke ♢, Schaufel ♠, Herz ♡ und Kreuz ♣. Jede Farbe hat neun Höhen: Das As (A), die drei Bildkarten König (K), Dame (D) und Bube (B) sowie fünf Zahlkarten 10, 9, 8, 7 und 6. Eine gezogene Karte wird als Farbzeichen gefolgt von der Höhe geschrieben, zum Beispiel ♡ D für «Herz Dame».

   (a) Wie lautet der Ergebnisraum Ω? Schreib inh nicht vollständig auf, sondern beschreibe ihn sinnvoll und gib die Anzahl Elemente an.

   (b) Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise? Gib jeweils die Anzahl Elemente an.

   A: «Karte ist eine Ecke» C: «Karte ist eine Zahl»
   B: «Karte ist ein Bild» D: «Karte ist ein As»

   (c) Wie lauten $A \cap D$, $B \cap C$ und $A \cup D$ in Mengenschreibweise? Wie können diese Ereignisse in Worten beschrieben werden?

   (d) Sind A und D unvereinbar? Sind B und C unvereinbar? Sind B und C Gegenereignisse voneinander? Begründe jeweils mit den Mengen aus (b) und (c).

   (e) Wie lauten die Gegenereignisse $\overline{B}$ und $\overline{D}$ in Worten? Gib jeweils die Anzahl Elemente an und schreibe sie sinnvoll als Menge auf (nicht unbedingt vollständig).

4. **Blutgruppen.** Es gibt vier Blutgruppen 0, A, B, AB sowie den Rhesusfaktor, der positiv oder negativ sein kann. Die Tabelle zeigt die Anteile der verschiedenen Blutgruppen und Rhesusfaktoren in der Schweiz:

Blutgruppe	$0+$	$A+$	$B+$	$AB+$	$0-$	$A-$	$B-$	$AB-$
Wahrscheinlichkeit		40 %	7 %	3.5 %	6 %	7 %	1 %	0.5 %

   (a) Ergänze die fehlende Angabe in der Tabelle.

   (b) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine zufällig ausgewählte Person aus der Schweiz Blutgruppe A hat?

   (c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Rhesusfaktor einer zufällig ausgewählten Person negativ ist?

   (d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person nicht die Blutgruppe 0 hat?

5. **Pünktlichkeit der SBB.** Bei der SBB gilt ein Zug als «pünktlich», wenn er höchstens 3 Minuten nach der Fahrplanzeit ankommt. Pro Reise werden die vier möglichen Ergebnisse betrachtet:

   A: «Der Zug ist pünktlich.»
   B: «Der Zug hat Verspätung von höchstens 30 Minuten.»
   C: «Der Zug hat Verspätung von mehr als 30 Minuten.»
   D: «Der Zug fällt aus.»

   Die Tabelle zeigt eine Zuordnung, die auf gerundeten Werten der aktuellen SBB-Statistik beruht.

Ergebnis	A	B	C	D
Wahrscheinlichkeit	$90\,\%$	$7\,\%$	$2\,\%$	$1\,\%$

   (a) Wie lautet der Ergebnisraum Ω? Dürfte man hier die Laplace-Regel verwenden? Begründe.

   (b) Prüfe, ob diese Zuordnung die Kolmogorov-Axiome erfüllt.

   (c) Wie lautet das Ereignis E: «der Zug verspätet sich» (mit beliebiger Verspätung) in Mengenschreibweise und wie gross ist $P(E)$ nach Axiom 3? Bestimme auch $P(\overline{E})$ – einerseits mit der Gegenereignis-Regel, andererseits direkt über die Menge $\overline{E}$.

   (d) Ein Fahrgast rechnet so: «Die Wahrscheinlichkeit für pünktlich ist $90\,\%$, die für nicht ausgefallen ist $99\,\%$; beides zusammen ergibt $189\,\%$.» Was ist an dieser Rechnung falsch? Wie lauten die beiden Ereignisse als Mengen und wie gross ist $P($ «pünktlich oder nicht ausgefallen» $)$ richtig?

   (e) Ein Pendler sagt: «Wenn $90\,\%$ der Züge pünktlich sind, kommen von meinen nächsten 10 Zügen sicher 9 pünktlich an.» Nimm Stellung.

6. **Gebäudeschaden.** Eine Gebäudeversicherung stellt fest, dass in den letzten Jahren die Schäden durch Unwetter deutlich zugenommen haben und dass fast jedes zweite Schadensereignis auf ein Unwetter zurückgeht.

   Ein versichertes Einfamilienhaus wird zufällig ausgewählt. Welche der beiden Aussagen ist wahrscheinlicher?

   – An diesem Haus entsteht in den nächsten zehn Jahren ein Gebäudeschaden.
   – An diesem Haus entsteht in den nächsten zehn Jahren ein Gebäudeschaden, welcher auf ein Unwetter zurückgeht.

   Wie kann dies mit den Kolmogorov-Axiomen begründet werden?

7. **Zahlenschloss.** Ein Zahlenschloss hat vier Walzen, auf denen jeweils die Ziffern 0 bis 9 eingestellt werden können. Eine Kombination ist zum Beispiel 0213: Die Reihenfolge der Ziffern spielt eine Rolle und dieselbe Ziffer kann mehrfach vorkommen. Zum Öffnen wird blind ein einziger Versuch gewagt.

   (a) Um welche Variante der Kombinatorik handelt es sich hier und wie viele Kombinationen $|\Omega|$ gibt es? Begründe und gib die Wahrscheinlichkeit an, die Kombination im ersten Versuch zu treffen.

   (b) Bestimme mit der Laplace-Regel die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E: «alle vier Ziffern sind gleich» und U: «es kommt keine 0 vor».

   (c) Wie ändert sich die Rechnung, wenn die vier Ziffern der Kombination *verschieden* sein müssen? Um welche Variante handelt es sich nun?

8. **Dreier-Wette.** Bei einem Pferderennen sind zwölf Pferde am Start. Bei der Dreier-Wette wird auf die ersten drei Pferde *in der richtigen Reihenfolge* getippt – ein Pferd kann dabei natürlich höchstens einmal ganz vorne stehen.

   (a) Um welche Variante der Kombinatorik handelt es sich und wie viele unterschiedliche Dreier-Tipps gibt es?

   (b) Wie gross ist die Gewinnchance, wenn auf einem Wettschein zehn unterschiedliche Dreier-Tipps abgegeben werden? Nimm an, alle Ausgänge seien gleich wahrscheinlich.

   (c) Wie gross wäre die Wahrscheinlichkeit, die drei ersten Pferde in *beliebiger* Reihenfolge richtig zu haben (Platz-Wette)? Welche Variante der Kombinatorik steckt dahinter?

9. **Jassblatt.** Aus einem gemischten Jassstock mit 36 Karten werden zufällig fünf Karten gezogen und zu einem Blatt zusammengestellt. Die Reihenfolge der Ziehung spielt keine Rolle – das Blatt $\{$As, König, $6;\ 7;\ 8\}$ ist dasselbe Ergebnis, egal in welcher Reihenfolge die Karten kamen.

   (a) Um welche Variante der Kombinatorik handelt es sich? Bestimme $|\Omega|$ und begründe kurz, warum die Laplace-Regel angewendet werden darf.

   (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis G: «alle fünf Karten sind in der gleichen Farbe»?

   (c) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für A: «genau ein As» und für N: «kein einziges As». Was folgt daraus für das Ereignis E: «mindestens ein As»?

10. **Urne mit Zurücklegen.** Eine Urne enthält drei Kugeln mit den Nummern 1, 2 und 3. Es wird zweimal gezogen; nach jedem Zug wird die Kugel zurückgelegt.

    (a) Schreibe den Ergebnisraum Ω als Menge geordneter Paare (i, j) auf und bestimme $P(S)$ für das Ereignis S: «die Summe der beiden Nummern ist 4».

    (b) Antonia meint: «Die Reihenfolge ist doch egal – dann gibt es nur die sechs Ergebnisse $\{1;\ 1\}$, $\{1;\ 2\}$, $\{1;\ 3\}$, $\{2;\ 2\}$, $\{2;\ 3\}$, $\{3;\ 3\}$, also ist $P\big(\{1;\ 1\}\big) = \frac{1}{6}$.» Stimmt das? Prüfe anhand der Anzahl «gleiche Nummern».

    (c) Formuliere eine Regel, wann man bei «Ziehen mit Zurücklegen» die Reihenfolge weglassen darf und wann nicht.