Grundbegriffe

1. **Würfel.** Ein Würfel wird einmal geworfen.

   (a) Wie lautet der Ergebnisraum Ω?

   Lösung:

   $\Omega = \{$$\}$ $A = \{$$\}$

   (b) Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise?

   A: «Augenzahl ist gerade» C: «Augenzahl ist eine Primzahl»
   B: «Augenzahl ist grösser als 4» D: «Augenzahl ist kleiner als 3»

   Lösung:

   $A = \{$$\}$
   $B = \{$$\}$
   $C = \{$$\}$
   $D = \{$$\}$

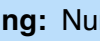
   (c) Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise? Wie können diese Ereignisse in Worten beschrieben werden?

   $A \cap B$ $C \cup D$ $\overline{B}$ $\overline{A \cup B}$

   Lösung:

   $A \cap B = \{$$\}$ «gerade und grösser als 4»
   $C \cup D = \{$$\}$ «Primzahl oder kleiner als 3»
   $\overline{B} = \{$$\}$ «höchstens 4»
   $\overline{A \cup B} = \{$$\}$ «weder gerade noch grösser als 4» oder «ungerade und höchstens 4»

   (d) Welche der Ereignisse A bis D sind unvereinbar?

   Lösung: Nur B und D: $B \cap D = \{$$\} \cap \{$$\} = \{\}$. Alle andern Paare haben gemeinsame Ergebnisse, sind also vereinbar:

   $A \cap B = \{$$\}$, $A \cap C = \{$$\}$, $A \cap D = \{$$\}$, $B \cap C = \{$$\}$, $C \cap D = \{$$\}$

(e) Wie können diese Ereignisse mit Mengenoperationen basierend auf den Ereignissen A bis D beschrieben werden? Wie lauten die Ereignisse als Menge?

F: «Augenzahl beträgt mindestens 3»
G: «Augenzahl ist eine gerade Primzahl»

Lösung: F: «mindestens 3» ist das Gegenereignis von D («kleiner als 3»):

$F = \overline{D} = \{$⚂; ⚃; ⚄; ⚅$\}$
$G = A \cap C = \{$⚁$\}$ (die 2 ist die einzige gerade Primzahl)

2. Münzen. Eine 1-Franken-Münze und ein Fünfliber werden gleichzeitig geworfen. Bei den Ergebnissen steht der erste Buchstabe für die 1-Franken-Münze, der zweite für den Fünfliber, K für Kopf und Z für Zahl.

(a) Wie lautet der Ergebnisraum Ω?

Lösung:

$\Omega = \{\text{KK};\ \text{KZ};\ \text{ZK};\ \text{ZZ}\}$

(b) Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise?

A: «Beide Münzen zeigen Kopf.»
B: «Mindestens einmal zeigt sich Zahl.»
C: «Beide Münzen zeigen dasselbe.»
D: «Die 1-Franken-Münze zeigt Zahl.»

Lösung:

$A = \{\text{KK}\}$
$B = \{\text{KZ};\ \text{ZK};\ \text{ZZ}\}$
$C = \{\text{KK};\ \text{ZZ}\}$
$D = \{\text{ZK};\ \text{ZZ}\}$

(c) Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise? Wie können diese Ereignisse in Worten beschrieben werden?

$A \cap B$ $A \cap D$ $B \cap C$ $A \cup C$ $C \cup D$

Lösung:

$A \cap B = \{\}$	«beide Kopf und mindestens einmal Zahl» (unmöglich)
$A \cap D = \{\}$	«beide Kopf und Franken zeigt Zahl» (unmöglich)
$B \cap C = \{\text{ZZ}\}$	«beide Münzen zeigen Zahl»
$A \cup C = \{\text{KK};\ \text{ZZ}\} = C$	«zweimal dasselbe»
$C \cup D = \{\text{KK};\ \text{ZK};\ \text{ZZ}\}$	«zweimal dasselbe oder die Franken zeigt Zahl»

(d) Welche der vier Ereignisse sind unvereinbar und wieso?

Lösung: A und B, A und D (je aus (c): die Schnittmenge ist $\{\}$). Dagegen sind B und C nicht unvereinbar (ZZ gehört zu beiden), ebenso C und D (ZZ) und B und D ($B \cap D = \{\text{ZK};\ \text{ZZ}\} = D$).

(e) Welche zwei der vier Ereignisse A bis D sind Gegenereignisse voneinander? Wie lauten die Gegenereignisse der anderen zwei Ereignisse?

Lösung: A und B: $A \cap B = \{\}$ und $A \cup B = \Omega$, also $\overline{A} = B$ und $\overline{B} = A$.

$\overline{C} = \{\text{KZ};\ \text{ZK}\}$	«Die beiden Münzen zeigen Verschiedenes.»
$\overline{D} = \{\text{KK};\ \text{KZ}\}$	«Die 1-Franken-Münze zeigt Kopf.»

3. Jassen. Aus einem gemischten Jassstock wird eine Karte gezogen. Ein Jassstock hat 36 Karten in vier Farben: Ecke ♢, Schaufel ♠, Herz ♡ und Kreuz ♣. Jede Farbe hat neun Höhen: Das As (A), die drei Bildkarten König (K), Dame (D) und Bube (B) sowie fünf Zahlkarten 10, 9, 8, 7 und 6. Eine gezogene Karte wird als Farbzeichen gefolgt von der Höhe geschrieben, zum Beispiel ♡ D für «Herz Dame».

(a) Wie lautet der Ergebnisraum Ω? Schreib inh nicht vollständig auf, sondern beschreibe ihn sinnvoll und gib die Anzahl Elemente an.

Lösung: Ω besteht aus allen Karten des Jassstocks, notiert als «Farbzeichen Rang», zum Beispiel ♢ A, ♢ K, …, ♣ 6. Es sind $4 \cdot 9$ Kombinationen, also $|\Omega| = \boxed{36}$.

(b) Wie lauten die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise? Gib jeweils die Anzahl Elemente an.

A: «Karte ist eine Ecke» C: «Karte ist eine Zahl»
B: «Karte ist ein Bild» D: «Karte ist ein As»

Lösung:

$A = \{♢\,\text{A};\ ♢\,\text{K};\ ♢\,\text{D};\ \ldots;\ ♢\,6\}$
$B = \{♢\,\text{K};\ ♢\,\text{D};\ ♢\,\text{B};\ \ldots;\ ♣\,\text{B}\}$
$C = \{♢\,10;\ ♢\,9;\ \ldots;\ ♣\,6\}$
$D = \{♢\,\text{A};\ ♠\,\text{A};\ ♡\,\text{A};\ ♣\,\text{A}\}$

Die Anzahlen sind $|A| = \boxed{9}$, $|B| = 4 \cdot 3 = \boxed{12}$, $|C| = 4 \cdot 5 = \boxed{20}$ und $|D| = \boxed{4}$.

(c) Wie lauten $A \cap D$, $B \cap C$ und $A \cup D$ in Mengenschreibweise? Wie können diese Ereignisse in Worten beschrieben werden?

Lösung:

$A \cap D = \{♢\,\text{A}\}$ «das Ecken-As wird gezogen»
$B \cap C = \{\}$ «Figur und Zahlkarte» – unmöglich
$A \cup D = A \cup \{♠\,\text{A};\ ♡\,\text{A};\ ♣\,\text{A}\}$ «Ecken oder As», $|A \cup D| = 12$

(d) Sind A und D unvereinbar? Sind B und C unvereinbar? Sind B und C Gegenereignisse voneinander? Begründe jeweils mit den Mengen aus (b) und (c).

Lösung: A und D sind **nicht** unvereinbar, denn $A \cap D = \{♢\,\text{A}\} \neq \{\}$. B und C sind unvereinbar, denn $B \cap C = \{\}$. Gegenereignisse sind sie darum aber noch **nicht**: $|B \cup C| = 12 + 20 = 32 \neq 36$, denn die vier Asse gehören zu keiner der beiden Gruppen, also $B \cup C \neq \Omega$. Es gilt $B \cup C = \overline{D}$.

(e) Wie lauten die Gegenereignisse $\overline{B}$ und $\overline{D}$ in Worten? Gib jeweils die Anzahl Elemente an und schreibe sie sinnvoll als Menge auf (nicht unbedingt vollständig).

Lösung: $\overline{B}$: «die Karte ist weder König noch Dame noch Bube», also alle Asse und Zahlkarten – zum Beispiel $\overline{B} = \{♢\,\text{A};\ ♢\,10;\ \ldots\}$; es ist $\overline{B} = D \cup C$ und $|\overline{B}| = 4 + 20 =$

$\boxed{24}$.

$\overline{D}$: «die Karte ist kein As», also alle Figuren und Zahlkarten; mit (d) ist $\overline{D} = B \cup C$ und $|\overline{D}| = 36 - 4 = \boxed{32}$.

4. Blutgruppen. Es gibt vier Blutgruppen 0, A, B, AB sowie den Rhesusfaktor, der positiv oder negativ sein kann. Die Tabelle zeigt die Anteile der verschiedenen Blutgruppen und Rhesusfaktoren in der Schweiz:

Blutgruppe	0+	A+	B+	AB+	0−	A−	B−	AB−
Wahrscheinlichkeit	35 %	40 %	7 %	3.5 %	6 %	7 %	1 %	0.5 %

(a) Ergänze die fehlende Angabe in der Tabelle.

Lösung: Die Anteile aller acht Ergebnisse müssen zusammen 100 % ergeben (Axiom 2). Die sieben bekannten Anteile summieren sich auf 65 %, also fehlt bei 0+

$$100\,\% - 65\,\% = \boxed{35\,\%}$$

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine zufällig ausgewählte Person aus der Schweiz Blutgruppe A hat?

Lösung: Das Ereignis «Blutgruppe A» ist die Vereinigung von A+ und A−. Beide sind unvereinbar, mit Axiom 3 also

$$P(\mathsf{A}) = 40\,\% + 7\,\% = \boxed{47\,\%}$$

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Rhesusfaktor einer zufällig ausgewählten Person negativ ist?

Lösung:

$$P(\text{negativ}) = 6\,\% + 7\,\% + 1\,\% + 0.5\,\% = \boxed{14.5\,\%}$$

(d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person nicht die Blutgruppe 0 hat?

Lösung: Über das Gegenereignis: $P(\mathsf{0}) = 35\,\% + 6\,\% = 41\,\%$, also

$$P(\overline{\text{Blutgruppe 0}}) = 100\,\% - P(\mathsf{0}) = 100\,\% - 41\,\% = \boxed{59\,\%}$$

5. **Pünktlichkeit der SBB.** Bei der SBB gilt ein Zug als «pünktlich», wenn er höchstens 3 Minuten nach der Fahrplanzeit ankommt. Pro Reise werden die vier möglichen Ergebnisse betrachtet:

   A: «Der Zug ist pünktlich.»
   B: «Der Zug hat Verspätung von höchstens 30 Minuten.»
   C: «Der Zug hat Verspätung von mehr als 30 Minuten.»
   D: «Der Zug fällt aus.»

   Die Tabelle zeigt eine Zuordnung, die auf gerundeten Werten der aktuellen SBB-Statistik beruht.

Ergebnis	A	B	C	D
Wahrscheinlichkeit	$90\,\%$	$7\,\%$	$2\,\%$	$1\,\%$

   (a) Wie lautet der Ergebnisraum Ω? Dürfte man hier die Laplace-Regel verwenden? Begründe.

   Lösung: $\Omega = \{A;\ B;\ C;\ D\}$ mit $|\Omega| = 4$. Nein: Die vier Ergebnisse sind **nicht** gleich wahrscheinlich – ein Ausfall ist viel seltener als eine pünktliche Ankunft. Laplace gilt nur bei gleich wahrscheinlichen Ergebnissen, hier muss man mit den Werten aus der Tabelle rechnen.

   (b) Prüfe, ob diese Zuordnung die Kolmogorov-Axiome erfüllt.

   Lösung: Axiom 1: Alle vier Werte liegen zwischen 0 und $100\,\%$. ✓
   Axiom 2: Die vier Ergebnisse sind unvereinbar und ergeben zusammen Ω, also muss gelten

   $$P(\Omega) = 90\,\% + 7\,\% + 2\,\% + 1\,\% = \boxed{100\,\%}.\ \checkmark$$

   Axiom 3: Wahrscheinlichkeiten von unvereinbaren Ereignissen werden addiert – genau so ist die Tabelle gemeint (z. B. «verspätet» $= B \cup C$ mit $7\,\% + 2\,\%$). ✓

   (c) Wie lautet das Ereignis E: «der Zug verspätet sich» (mit beliebiger Verspätung) in Mengenschreibweise und wie gross ist $P(E)$ nach Axiom 3? Bestimme auch $P(\overline{E})$ – einerseits mit der Gegenereignis-Regel, andererseits direkt über die Menge $\overline{E}$.

   Lösung:

   $$E = \{B;\ C\} \qquad P(E) = 7\,\% + 2\,\% = \boxed{9\,\%}$$
   $$\overline{E} = \{A;\ D\} \qquad P(\overline{E}) = 90\,\% + 1\,\% = \boxed{91\,\%}$$

   Mit der Gegenereignis-Regel: $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 100\,\% - 9\,\% = 91\,\%$ ✓

   (d) Ein Fahrgast rechnet so: «Die Wahrscheinlichkeit für pünktlich ist $90\,\%$, die für nicht ausgefallen ist $99\,\%$; beides zusammen ergibt $189\,\%$.» Was ist an dieser Rechnung falsch? Wie lauten die beiden Ereignisse als Mengen und wie gross ist $P($ «pünktlich oder nicht ausgefallen» $)$ richtig?

   Lösung:

   «pünktlich» $= \{A\}$ «nicht ausgefallen» $= \{A;\ B;\ C\}$

Axiom 3 darf nur für **unvereinbare** Ereignisse verwendet werden – diese beiden überschneiden sich, denn jeder pünktliche Zug ist automatisch nicht ausgefallen, also $\{A\} \subset \{A;\ B;\ C\}$.

$$\{A\} \cup \{A;\ B;\ C\} = \{A;\ B;\ C\} = \overline{D} \qquad P = 1 - 1\,\% = \boxed{99\,\%}$$

Eine Wahrscheinlichkeit grösser als $100\,\%$ verstösst direkt gegen Axiom 1 – das ist das Warnsignal für die falsche Addition.

(e) Ein Pendler sagt: «Wenn $90\,\%$ der Züge pünktlich sind, kommen von meinen nächsten 10 Zügen sicher 9 pünktlich an.» Nimm Stellung.

Lösung: Nein. Die $90\,\%$ beschreibt die langfristige relative Häufigkeit sehr vieler Fahrten, aber keine Garantie für zehn einzelne Fahrten. Es kann gut sein, dass 9 oder 10 Züge pünktlich sind – ebenso kann aber auch die Streuung zuschlagen, sodass etwa nur 7 pünktlich ankommen. (Richtig rechnen könnte man erst mit mehreren unabhängigen Fahrten, z. B. $0.9^{10} \approx 0.35$, also rund $35\,\%$ für «alle zehn pünktlich» – Thema eines spätern Kapitels.)

6. **Gebäudeschaden.** Eine Gebäudeversicherung stellt fest, dass in den letzten Jahren die Schäden durch Unwetter deutlich zugenommen haben und dass fast jedes zweite Schadensereignis auf ein Unwetter zurückgeht.

   Ein versichertes Einfamilienhaus wird zufällig ausgewählt. Welche der beiden Aussagen ist wahrscheinlicher?

   – An diesem Haus entsteht in den nächsten zehn Jahren ein Gebäudeschaden.

   – An diesem Haus entsteht in den nächsten zehn Jahren ein Gebäudeschaden, welcher auf ein Unwetter zurückgeht.

   Wie kann dies mit den Kolmogorov-Axiomen begründet werden?

Lösung: S: «Das Haus erleidet in den nächsten zehn Jahren einen Gebäudeschaden», U: «der Schaden geht auf ein Unwetter zurück». Die zweite Aussage beschreibt das Ereignis $S \cap U$, und es gilt

$$S \cap U \subseteq S \qquad \text{also} \qquad P(S \cap U) \leq P(S)$$

Begründung mit Axiom 3: $S \cap U$ und $S \cap \overline{U}$ sind unvereinbar und ergeben zusammen S, also

$$P(S) = P(S \cap U) + P\big(S \cap \overline{U}\big) \geq P(S \cap U).$$

Die erste Aussage ist also wahrscheinlicher – oder gleich wahrscheinlich, falls jeder Schaden auf ein Unwetter zurückgeht.

7. **Zahlenschloss.** Ein Zahlenschloss hat vier Walzen, auf denen jeweils die Ziffern 0 bis 9 eingestellt werden können. Eine Kombination ist zum Beispiel 0213: Die Reihenfolge der Ziffern spielt eine Rolle und dieselbe Ziffer kann mehrfach vorkommen. Zum Öffnen wird blind ein einziger Versuch gewagt.

   (a) Um welche Variante der Kombinatorik handelt es sich hier und wie viele Kombinationen $|\Omega|$ gibt es? Begründe und gib die Wahrscheinlichkeit an, die Kombination im ersten Versuch zu treffen.

   Lösung: Geordnetes Auswählen mit Wiederholung: Pro Walze gibt es 10 Möglichkeiten und die Wahl der einen Walze beeinflusst die anderen nicht, also

   $$|\Omega| = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{4 \text{ Mal}} = 10^4 = \boxed{10'000}$$

   Alle Kombinationen sind gleich wahrscheinlich (Laplace), also

   $$P(\text{«im 1. Versuch offen»}) = \frac{1}{10'000} = \boxed{0.01\,\%}$$

   Achtung: Anders als bei vierstelligen *Zahlen* darf hier die erste Ziffer 0 sein – «Zahlen bilden» und «Kombination einstellen» sind verschiedene Experimente.

   (b) Bestimme mit der Laplace-Regel die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E: «alle vier Ziffern sind gleich» und U: «es kommt keine 0 vor».

   Lösung: E: Es gibt 10 Möglichkeiten (0000, 1111, …, 9999), also

   $$P(E) = \frac{10}{10^4} = \frac{1}{1000} = \boxed{0.1\,\%}$$

   U: Pro Walze bleiben 9 zulässige Ziffern, also $|U| = 9^4 = 6561$ und

   $$P(U) = \frac{9^4}{10^4} = \frac{6561}{10'000} = \boxed{65.61\,\%}$$

   (c) Wie ändert sich die Rechnung, wenn die vier Ziffern der Kombination *verschieden* sein müssen? Um welche Variante handelt es sich nun?

   Lösung: Nun wird **geordnet ohne Wiederholung** ausgewählt: Für die erste Walze hat man noch 10 Möglichkeiten, für die zweite nur noch 9 usw.

   $$|\Omega'| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!} = \boxed{5040}$$

   Die Wahrscheinlichkeit, unter allen 10^4 Kombinationen eine mit vier verschiedenen Ziffern zu erwischen, ist $P = \frac{5040}{10'000} = \boxed{50.4\,\%}$.

8. **Dreier-Wette.** Bei einem Pferderennen sind zwölf Pferde am Start. Bei der Dreier-Wette wird auf die ersten drei Pferde *in der richtigen Reihenfolge* getippt – ein Pferd kann dabei natürlich höchstens einmal ganz vorne stehen.

   (a) Um welche Variante der Kombinatorik handelt es sich und wie viele unterschiedliche Dreier-Tipps gibt es?

Lösung: Geordnetes Auswählen ohne Wiederholung: Für den Sieger hat man 12 Möglichkeiten, für den zweiten Platz noch 11 und für den dritten noch 10.

$$|\Omega| = 12 \cdot 11 \cdot 10 = \frac{12!}{9!} = \boxed{1320}$$

(b) Wie gross ist die Gewinnchance, wenn auf einem Wettschein zehn unterschiedliche Dreier-Tipps abgegeben werden? Nimm an, alle Ausgänge seien gleich wahrscheinlich.

Lösung: Bei Gleichwahrscheinlichkeit darf gezählt werden (Laplace): Zehn günstige unter 1320 möglichen Ergebnissen geben

$$P = \frac{10}{1320} = \frac{1}{132} \approx \boxed{0.76\,\%}$$

Frage zur Laplace-Bedingung: Ist «alle Rennausgänge gleich wahrscheinlich» realistisch? Nein – die Pferde sind unterschiedlich stark. Gezählt werden darf hier nur, weil die Aufgabe diese Gleichmöglichkeit ausdrücklich annimmt.

(c) Wie gross wäre die Wahrscheinlichkeit, die drei ersten Pferde in *beliebiger* Reihenfolge richtig zu haben (Platz-Wette)? Welche Variante der Kombinatorik steckt dahinter?

Lösung: Jede Menge $\{$drei Pferde$\}$ entspricht $3! = 6$ geordneten Ergebnissen. Für eine getippte Menge von drei Pferden sind also 6 der 1320 Ausgänge günstig:

$$P = \frac{3!}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{6}{1320} = \boxed{\frac{1}{220} \approx 0.45\,\%}$$

Das Zählen der Pferde-Mengen ist **ungeordnet ohne Wiederholung** ($\binom{12}{3} = 220$ Mengen) – als Laplace-Ergebnisse darf man die Mengen aber nur verwenden, weil hier jede Menge gleich oft auftritt (nämlich 6-mal).

9. Jassblatt. Aus einem gemischten Jassstock mit 36 Karten werden zufällig fünf Karten gezogen und zu einem Blatt zusammengestellt. Die Reihenfolge der Ziehung spielt keine Rolle – das Blatt $\{$As, König, $6;\ 7;\ 8\}$ ist dasselbe Ergebnis, egal in welcher Reihenfolge die Karten kamen.

(a) Um welche Variante der Kombinatorik handelt es sich? Bestimme $|\Omega|$ und begründe kurz, warum die Laplace-Regel angewendet werden darf.

Lösung: Ungeordnetes Auswählen ohne Wiederholung – die Anzahl Blätter ist der Binomialkoeffizient

$$|\Omega| = \binom{36}{5} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{376'992}$$

Beim blinden Ziehen ist jede Karten*folge* gleich wahrscheinlich; die Reihenfolge wird nur ignoriert, nicht gewichtet – also sind auch alle $\binom{36}{5}$ Blätter gleich wahrscheinlich.

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis G: «alle fünf Karten sind in der gleichen Farbe»?

Lösung: Farbe wählen (4 Möglichkeiten), dann 5 aus den 9 Karten dieser Farbe:

$$|G| = 4 \cdot \binom{9}{5} = 4 \cdot 126 = 504 \qquad P(G) = \frac{504}{376'992} \approx \boxed{0.134\,\%}$$

(c) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für A: «genau ein As» und für N: «kein einziges As». Was folgt daraus für das Ereignis E: «mindestens ein As»?

Lösung: Für A wird 1 der 4 Asse gewählt und die übrigen 4 Karten aus den 32 Nicht-Assen:

$$|A| = \binom{4}{1} \cdot \binom{32}{4} = 4 \cdot 35'960 = 143'840 \qquad P(A) = \frac{143'840}{376'992} \approx \boxed{38.2\,\%}$$

Für N kommen alle fünf Karten aus den 32 Nicht-Assen:

$$|N| = \binom{32}{5} = 201'376 \qquad P(N) = \frac{201'376}{376'992} \approx \boxed{53.4\,\%}$$

Da $E = \overline{N}$:

$$P(E) = 1 - P(N) \approx \boxed{46.6\,\%}$$

Kontrolle auf Laplace-Basis: $\binom{36}{5} - \binom{32}{5} = 175'616$ günstige Blätter, $\frac{175'616}{376'992} \approx 46.6\,\%$ – dasselbe Ergebnis.

10. Urne mit Zurücklegen. Eine Urne enthält drei Kugeln mit den Nummern 1, 2 und 3. Es wird zweimal gezogen; nach jedem Zug wird die Kugel zurückgelegt.

(a) Schreibe den Ergebnisraum Ω als Menge geordneter Paare (i, j) auf und bestimme $P(S)$ für das Ereignis S: «die Summe der beiden Nummern ist 4».

Lösung:

$$\Omega = \{(1;\,1);\ (1;\,2);\ (1;\,3);\ (2;\,1);\ (2;\,2);\ (2;\,3);\ (3;\,1);\ (3;\,2);\ (3;\,3)\}\,, \qquad |\Omega| = 3^2 = 9$$

$$S = \{(1;\,3);\ (2;\,2);\ (3;\,1)\} \qquad P(S) = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Alle neun Paare sind gleich wahrscheinlich (je $\frac{1}{9}$), Laplace darf verwendet werden: **geordnetes** Auswählen **mit** Wiederholung.

(b) Antonia meint: «Die Reihenfolge ist doch egal – dann gibt es nur die sechs Ergebnisse $\{1;\,1\}$, $\{1;\,2\}$, $\{1;\,3\}$, $\{2;\,2\}$, $\{2;\,3\}$, $\{3;\,3\}$, also ist $P(\{1;\,1\}) = \frac{1}{6}$.» Stimmt das? Prüfe anhand der Anzahl «gleiche Nummern».

Lösung: Die sechs *Mengen* sind tatsächlich alle möglichen **ungeordneten** Ergebnisse – aber sie sind **nicht gleich wahrscheinlich**: Zu $\{1;\,1\}$ gehört nur das Paar $(1, 1)$, zu $\{1;\,2\}$ dagegen die beiden Paare $(1, 2)$ und $(2, 1)$. Also

$$P(\{1;\,1\}) = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{6} \qquad \text{und} \qquad P(\text{«gleiche Nummern»}) = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}} \neq \frac{3}{6}.$$

Antonias Zählung ist derselbe Fehlgriff wie beim Glücksrad in der Vorlesung: Anzahl Namen $\neq$ Anzahl gleich möglicher Ergebnisse.

(c) Formuliere eine Regel, wann man bei «Ziehen mit Zurücklegen» die Reihenfolge weglassen darf und wann nicht.

Lösung: Die Reihenfolge darf man nur zusammenfassen, wenn alle Resultate der Zusammenfassung *gleich oft* vorkommen. Mit Zurücklegen ist das falsch: «verschiedene Nummern» sind doppelt so häufig wie «gleiche Nummern», die Variante **ungeordnet mit Wiederholung** liefert also **keine gleich möglichen Ergebnisse** und ist kein Laplace-Modell. Bei Zurücklegen immer geordnet zählen: n^k gleich mögliche Ergebnisse. Die Formel für ungeordnete Mehrfachauswahlen $\binom{n+k-1}{k}$ auszupacken bringt nichts – «Axiome messen, Laplace zählt» gilt nur auf der Ebene gleich möglicher Ergebnisse.