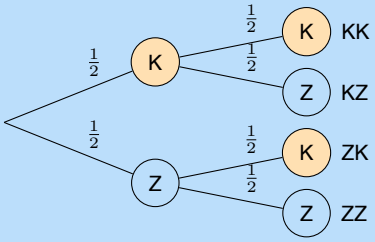
Mehrstufige Experimente

1. **Zwei Münzwürfe.** Eine Münze wird zweimal hintereinander geworfen. Bei jedem Wurf kann das Ergebnis Kopf (K) oder Zahl (Z) mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

   (a) Wie sieht das vollständig beschriftete Baumdiagramm dieses Experiments aus?

   Lösung:

   (b) Wie kann die Wahrscheinlichkeit, dass genau einmal Kopf auftritt, mit Hilfe des Baumdiagramms ermittelt werden?

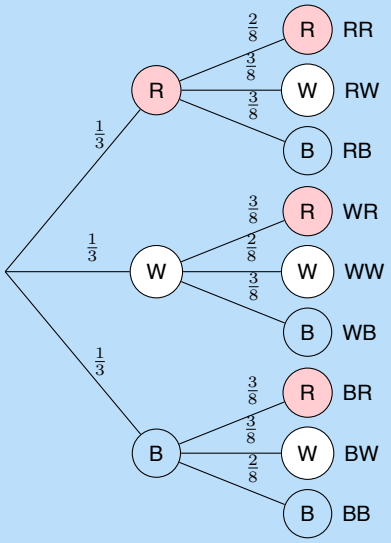
   Lösung: Es werden die Pfade mit den Ergebnissen KZ und ZK verwendet.

   $$P(\text{«genau einmal Kopf»}) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \boxed{\tfrac{1}{2}}$$

2. **Urne ohne Zurücklegen.** Eine Urne enthält je drei weisse, rote und blaue Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln gezogen und die Farben notiert. Die Kugeln werden nicht zurückgelegt.

   (a) Wie sieht das vollständig beschriftete Baumdiagramm dieses Experiments aus?

   Lösung:

   Beachte: Nach dem ersten Zug liegen nur noch acht Kugeln in der Urne – die Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe hängen vom Ergebnis der ersten Stufe ab.

(b) Wie kann die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine rote und eine blaue Kugel gezogen werden, mit Hilfe des Baumdiagramms ermittelt werden?

Lösung: Es werden die Pfade mit den Ergebnissen RB und BR verwendet.

$$P(\text{«genau Rot und Blau»}) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{8} = \tfrac{3}{24} + \tfrac{3}{24} = \tfrac{6}{24} = \boxed{\tfrac{1}{4}}$$

(c) Wie kann die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln dieselbe Farbe haben, mit Hilfe des Baumdiagramms ermittelt werden?

Lösung: Zu «gleiche Farbe» gehören die Pfade RR, WW und BB. Alle drei haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, also

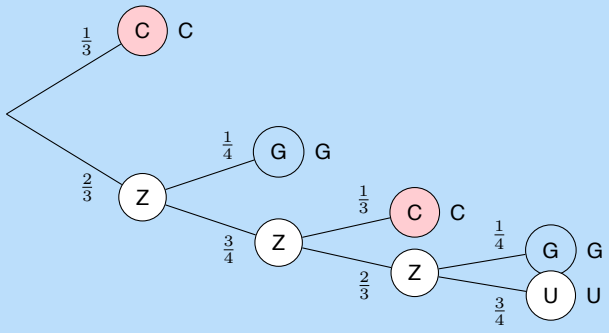
$$P(\text{«gleiche Farbe»}) = 3\cdot\left(\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{8}\right) = 3\cdot\tfrac{2}{24} = \boxed{\tfrac{1}{4}}$$

Kontrolle: Die sechs gemischten Pfade (RB, BR, RW, WR, BW, WB) haben zusammen $6\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{4}$, und $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ✓

3. Dosenwerfen. Chris und Georg werfen abwechselnd je zweimal auf eine Blechdose, wobei Chris beginnt. Die Treffsicherheit von Chris beträgt $\frac{1}{3}$, diejenige von Georg $\frac{1}{4}$. Wer zuerst trifft, hat gewonnen (C bzw. G). Wenn niemand trifft, ist das Spiel unentschieden (U).

(a) Wie sieht das vollständig beschriftete Baumdiagramm dieses Experiments aus?

Lösung: Im Baumdiagramm wird ein Zwischenstand, bei welchem das Spiel noch nicht vorbei ist, mit Z bezeichnet.



(b) Wie kann die Wahrscheinlichkeit, dass Chris gewinnt, mit Hilfe des Baumdiagramms ermittelt werden?

Lösung: Es werden die beiden Pfade mit dem Ergebnis C verwendet.

$$P(\text{C}) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \boxed{\tfrac{1}{2}}$$

(c) Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten, dass Georg gewinnt und dass das Spiel unentschieden endet? Hat Chris einen Vorteil?

Lösung:

$$P(\text{G}) = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{12} = \boxed{\tfrac{1}{4}} \qquad P(\text{U}) = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{4} = \boxed{\tfrac{1}{4}}$$

Kontrolle: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ✓
Ja: Chris gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, Georg nur mit $\frac{1}{4}$ – der Vorteil entsteht dadurch, dass Chris beginnen darf und das Spiel mit seinem Treffer sofort beendet ist.

(d) ★ Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Chris gewinnt, wenn das Spiel so lange weitergespielt wird, bis jemand gewonnen hat?

Lösung: 🤖 Chris und Georg werfen abwechselnd weiter, bis jemand trifft. «Überlebt» eine Runde (beide werfen daneben), beginnt das Spiel mit denselben Wahrscheinlichkeiten von vorn; eine Runde überlebt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$. Also

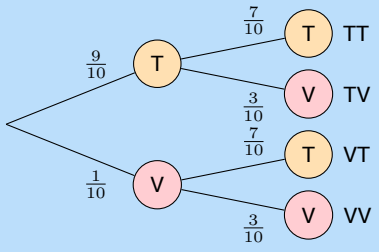
$$P(\text{C}) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{3} + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \boxed{\tfrac{2}{3}}$$

(Summe der unendlichen geometrischen Reihe). Analog ist $P(\text{G}) = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$; Kontrolle: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$, denn «niemand trifft je» hat die Wahrscheinlichkeit $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

4. **Elfmeterschiessen.** Adriano schiesst in einem Fussballspiel in der ersten und in der zweiten Halbzeit je einen Elfmeter. Seine Trefferwahrscheinlichkeit in der ersten Halbzeit beträgt 90 %, in der zweiten Halbzeit trifft er mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %. Jeden Elfmeter kann Adriano entweder treffen (T) oder verfehlen (V); insgesamt sind also vier Ergebnisse möglich.

(a) Wie sieht das vollständig beschriftete Baumdiagramm dieses Experiments aus?

Lösung:



(b) Wie kann die Wahrscheinlichkeit, dass Adriano beide Elfmeter trifft, mit Hilfe des Baumdiagramms ermittelt werden?

Lösung: Es wird der Pfad mit dem Ergebnis TT verwendet.

$$P(\text{TT}) = \tfrac{9}{10} \cdot \tfrac{7}{10} = \tfrac{63}{100} = \boxed{63\,\%}$$

(c) Wie kann die Wahrscheinlichkeit, dass Adriano genau einen Elfmeter trifft, mit Hilfe des Baumdiagramms ermittelt werden?

Lösung: Es werden die Pfade mit den Ergebnissen TV und VT verwendet.

$$P(\text{«genau ein Treffer»}) = \tfrac{9}{10} \cdot \tfrac{3}{10} + \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{7}{10} = \tfrac{27}{100} + \tfrac{7}{100} = \boxed{\tfrac{34}{100} = 34\,\%}$$

(d) Wie kann die Wahrscheinlichkeit, dass Adriano mindestens einen Elfmeter trifft, mit Hilfe des Baumdiagramms ermittelt werden? Wie wird diese Wahrscheinlichkeit mit dem Gegenereignis berechnet? Welcher Weg ist einfacher?

Lösung: *Direkt:* Die Pfade TT, TV und VT zählen zusammen

$$\frac{63}{100} + \frac{27}{100} + \frac{7}{100} = \frac{97}{100}.$$

Über das Gegenereignis: «mindestens ein Treffer» ist das Gegenteil von «keinen Treffer», also nur der Pfad VV:

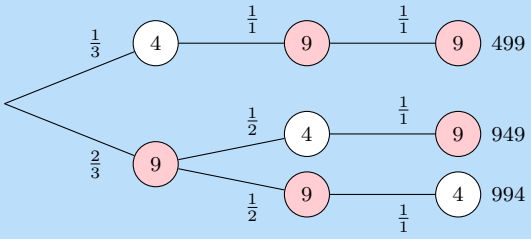
$$P(\text{«mind. 1 Treffer»}) = 1 - P(\text{VV}) = 1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} = 1 - \frac{3}{100} = \boxed{\frac{97}{100} = 97\,\%}$$

Die Rechnung über das Gegenereignis ist einfacher, weil «mindestens eins» drei Pfade umfasst, das Gegenereignis «keiner» aber nur einem einzigen Pfad entspricht.

5. **Dreistellige Zahl.** In einer Urne sind drei Kugeln: eine ist mit der Ziffer 4 und die zwei anderen mit der Ziffer 9 gekennzeichnet. Du ziehst die drei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen aus der Urne. Damit bilden die Kugeln eine dreistellige Zahl, zum Beispiel 499.

(a) Wie sieht das vollständig beschriftete Baumdiagramm dieses Experiments aus?

Lösung:



(b) Wie kann die Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere Ziffer eine 9 ist, mit Hilfe des Baumdiagramms ermittelt werden?

Lösung: Es werden die Pfade mit den Ergebnissen 499 und 994 verwendet.

$$P(\text{«Mitte 9»}) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

(c) Wie kann die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl gerade ist, mit Hilfe des Baumdiagramms ermittelt werden?

Lösung: Nur die Zahl 994 ist gerade, also wird nur dieser Pfad benötigt:

$$P(\text{«gerade»}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

6. **Schönwetter am Wochenende.** Die Wetterprognose sagt für Samstag schönes Wetter mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % und für Sonntag mit einer Wahrscheinlichkeit von

70 % voraus. Gehe davon aus, dass sich das Wetter an den beiden Tagen unabhängig voneinander entwickelt.

(a) Wie kann mit Hilfe von Pfadregeln die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass das Wetter an beiden Tagen schön ist?

Lösung:

$$P(\text{«beide Tage schön»}) = 0.8 \cdot 0.7 = \boxed{0.56 = 56\,\%}$$

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der beiden Tage schön wird?

Lösung: Es ist entweder am Samstag schön und am Sonntag nicht oder es ist am Sonntag schön und am Samstag nicht.

$$\begin{aligned} P(\text{«genau ein schöner Tag»}) &= 0.8 \cdot (1 - 0.7) + (1 - 0.8) \cdot 0.7 \\ &= 0.24 + 0.14 = \boxed{0.38 = 38\,\%} \end{aligned}$$

(c) Wie kann die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass es mindestens an einem der beiden Tage schön ist? Tipp: Verwende das Gegenereignis.

Lösung: Das Gegenereignis ist «An beiden Tagen nicht schön.»

$$\begin{aligned} P(\text{«mindestens ein schöner Tag»}) &= 1 - (1 - 0.8) \cdot (1 - 0.7) \\ &= 1 - 0.2 \cdot 0.3 = \boxed{0.94 = 94\,\%} \end{aligned}$$

7. **Freiwürfe.** Ein Basketballspieler wirft dreimal auf den Korb und trifft jedes Mal unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p. Was bedeuten die folgenden Wahrscheinlichkeiten in diesem Zusammenhang?

(a) $P(A) = p^3$

Lösung: Er trifft alle drei Würfe.

(b) $P(B) = 1 - p^3$

Lösung: Dies ist das Gegenereignis zu A. Er trifft nicht alle drei Würfe, also höchstens zwei.

(c) $P(C) = (1 - p)^3$

Lösung: Er verschiesst alle drei Würfe.

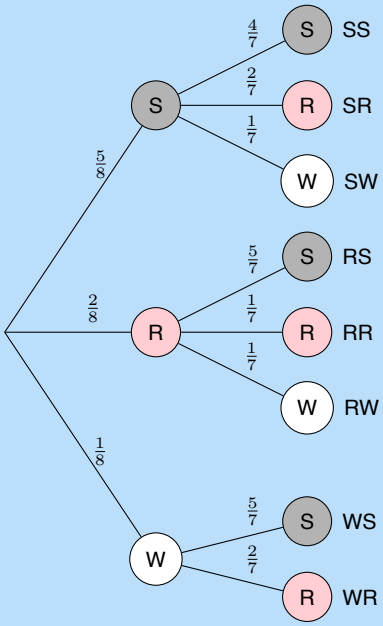
(d) $P(D) = 1 - (1 - p)^3$

Lösung: Dies ist das Gegenereignis zu C: Er verschiesst nicht alle drei Würfe, trifft also mindestens einmal.

8. **Verschiedene Farben.** ★ In einer Urne befinden sich fünf schwarze, zwei rote und eine weisse Kugel. Es werden zwei Kugeln gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man zwei verschiedenfarbige Kugeln?

(a) Die Kugeln werden nicht zurückgelegt. Wie sieht das vollständig beschriftete Baumdiagramm aus? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit?

Lösung:



Über das Gegenereignis «gleiche Farbe» (die Pfade SS, RR und WW; WW ist unmöglich, weil nur eine weisse Kugel in der Urne liegt):

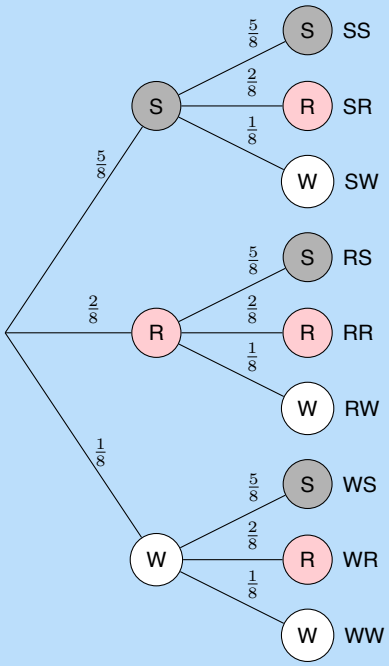
$$P(\text{«gleiche Farbe»}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + 0 = \frac{20}{56} + \frac{2}{56} = \frac{11}{28}$$

$$P(\text{«verschiedene Farben»}) = 1 - \frac{11}{28} = \boxed{\frac{17}{28} \approx 60.71\,\%}$$

Direkt über die sechs gemischten Pfade (SR, SW, RS, RW, WS, WR) ergibt sich dieselbe Summe $\frac{17}{28}$.

(b) Die gezogene Kugel wird jeweils zurückgelegt. Wie sieht das vollständig beschriftete Baumdiagramm aus? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit?

Lösung:



Auf der zweiten Stufe stehen überall wieder Achtel, weil alle acht Kugeln im Spiel sind. Über das Gegenereignis «gleiche Farbe»:

$$P(\text{«gleiche Farbe»}) = \left(\tfrac{5}{8}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{8}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{8}\right)^2 = \tfrac{25}{64} + \tfrac{4}{64} + \tfrac{1}{64} = \tfrac{15}{32}$$

$$P(\text{«verschiedene Farben»}) = 1 - \tfrac{15}{32} = \boxed{\tfrac{17}{32} = 53.125\,\%}$$

(c) Bei welcher Variante (a) oder (b) ist die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln grösser? Wieso?

Lösung: Beim Zug **ohne** Zurücklegen ist die Wahrscheinlichkeit grösser:

$$\tfrac{17}{28} > \tfrac{17}{32}$$

Da es nur eine weisse Kugel gibt, können beim Ziehen ohne Zurücklegen nie zwei weisse Kugeln gezogen werden. Auch die Wahrscheinlichkeiten, zwei gleiche rote oder schwarze Kugeln zu ziehen, werden reduziert.

9. Mindestens eine Sechs. ★ Mit welcher der folgenden Formeln wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass bei viermaligem Würfeln mit einem Würfel mindestens einmal eine Sechs auftritt? Was für Wahrscheinlichkeiten werden mit den anderen Formeln berechnet?

(a) $P(A) = 4 \cdot \frac{1}{6}$

Lösung: Falsch. Wenn sieben Mal gewürfelt würde, wäre die Wahrscheinlichkeit grösser als Eins.

(b) $P(B) = \left(\frac{1}{6}\right)^4$

Lösung: Falsch. Das ist die Wahrscheinlichkeit, dass jedes Mal eine Sechs gewürfelt wird.

(c) $P(C) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$

Lösung: Richtig. Das Gegenereignis zu «mindestens eine Sechs» ist «keine Sechs».

(d) $P(D) = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$

Lösung: Falsch. Das ist die Wahrscheinlichkeit für «genau eine Sechs».