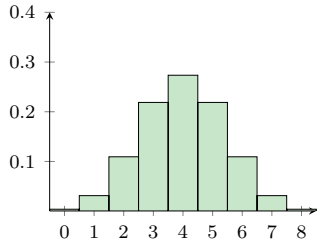
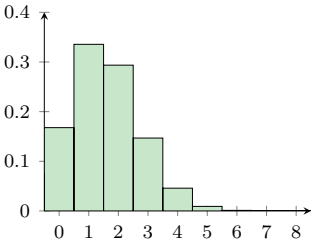
Einseitige Signifikanztests

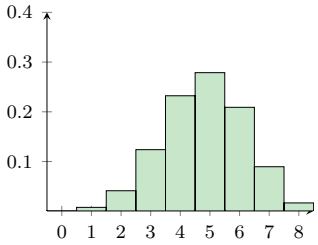
1. **Verwerfungsbereich einzeichnen.** Ermittle für die abgebildeten Binomialverteilungen für $\alpha = 0.1$ die Verwerfungsbereiche V_L für einen linksseitigen Test sowie V_R für einen rechtsseitigen Test. Zeichne die Verwerfungsbereiche in die Diagramme ein.



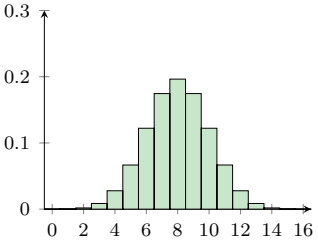
(a) $n = 8 \quad p = 0.5$



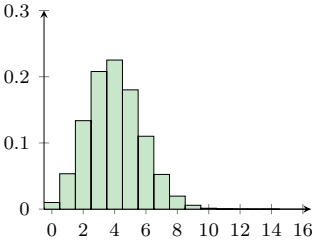
(b) $n = 8 \quad p = 0.2$



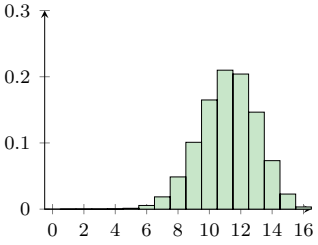
(c) $n = 8 \quad p = 0.6$



(d) $n = 16 \quad p = 0.5$



(e) $n = 16 \quad p = 0.25$



(f) $n = 16 \quad p = 0.7$

Lösung:

(a) $V_L = \{0;\ 1\} \qquad V_R = \{7;\ 8\}$

(b) $V_L = \{\} \qquad V_R = \{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$

(c) $V_L = \{0;\ 1;\ 2\} \qquad V_R = \{8\}$

(d) $V_L = \{0;\ 1;\ \ldots;\ 4\} \qquad V_R = \{12;\ 13;\ 14;\ 15;\ 16\}$

(e) $V_L = \{0;\ 1\} \qquad V_R = \{7;\ 8;\ \ldots;\ 16\}$

(f) $V_L = \{0;\ 1;\ \ldots;\ 8\} \qquad V_R = \{14;\ 15;\ 16\}$

2. **Verwerfungsbereich.** Wie lautet der Verwerfungsbereich für die folgenden Signifikanztests auf der Binomialverteilung?

(a) $H_0 \colon p = 0.4 \quad H_1 \colon p < 0.4 \quad n = 40 \quad \alpha = 0.01$

Lösung: $V = \{0;\ \ldots;\ 8\}$

(b) $H_0 \colon p = 0.85 \quad H_1 \colon p < 0.85 \quad n = 120 \quad \alpha = 0.05$

Lösung: $V = \{0;\ \ldots;\ 90\}$

(c) $H_0 \colon p = 0.25 \quad H_1 \colon p > 0.25 \quad n = 40 \quad \alpha = 0.02$

Lösung: $V = \{17;\ \ldots;\ 40\}$

(d) $H_0 \colon p = 0.1 \quad H_1 \colon p > 0.1 \quad n = 200 \quad \alpha = 0.05$

Lösung: $V = \{28;\ \ldots;\ 200\}$

3. **Hellseherei.** Im Jahr 1973 führte Charles Tart an der University of California ein Experiment durch, um aussersinnliche Wahrnehmung zu demonstrieren. Ein Computer wählte eines von vier möglichen Symbolen zufällig aus. Die Versuchsperson sah das Resultat nicht und musste das richtige Symbol herausfinden. Jede Versuchsperson wiederholte dies 500 Mal, und es wurden 15 Personen getestet, welche behaupteten, hellseherische Fähigkeiten zu besitzen. Insgesamt wurde das richtige Symbol in 2006 von $15 \cdot 500 = 7500$ Wiederholungen herausgefunden (Freedman et al., 1978).

   (a) Bestimme den Verwerfungsbereich der Nullhypothese «Die getesteten Personen erraten die Symbole rein zufällig» gegenüber der Annahme, dass sie besser als durch reinen Zufall erraten, für das Signifikanzniveau $\alpha = 1\,\%$.

   Lösung: $H_0 \colon p = \frac{1}{4}$ Die getesteten Personen erraten die Symbole rein zufällig, sie haben keine hellseherischen Fähigkeiten. $H_1 \colon p > \frac{1}{4}$

   $n = 7500$, $\mu = 1875$, $\sigma = 37.5$, $\alpha = 0.01$, $u = 2.326$, $k_R \approx 1962.2$.

   Mit der kumulativen Binomialverteilung die Grenze genau bestimmen: $P(X \geq 1963) \approx 0.0101 > 0.01$, aber $P(X \geq 1964) \approx 0.0094 \leq 0.01$.

   Der Verwerfungsbereich ist also $V_R = \{1964;\ \ldots;\ 7500\}$

   (b) Zu welchem Schluss führt der entwickelte Test?

   Lösung: $k = 2006$ liegt im Verwerfungsbereich, H_0 wird also verworfen. Auf dem Signifikanzniveau von $1\,\%$ gilt die Vermutung der hellseherischen Fähigkeiten damit als statistisch belegt.

   (c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Personen ohne hellseherische Fähigkeiten bei 7500 Wiederholungen rein zufällig in 2006 oder mehr Fällen das richtige Symbol erraten?

   Lösung: X = Anzahl richtig erratener Symbole, $n = 7500$, $p = 0.25$-binomial verteilte Zufallsgrösse.

   $P(X \geq 2006) = 1 - P(X \leq 2005) \approx 0.00027$

4. **Siedler von Catan.** Eine Person hat beim Spielen des Spiels «Siedler von Catan» Pech, weil sie nie eine Sechs würfelt. Die Person vermutet, dass der Würfel nicht fair ist und die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs kleiner als $\frac{1}{6}$ ist.

   Zur Überprüfung wird der Würfel 120-mal geworfen. Wie oft darf die Sechs höchstens erscheinen, damit die Vermutung, dass der Würfel zu selten eine Sechs würfelt, mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.1\,\%$ als statistisch belegt gilt? Wie lautet der zugehörige Verwerfungsbereich?

Lösung: Erfolg bedeutet, dass der Würfel eine Sechs zeigt.

$H_0\colon p = \frac{1}{6}$ $H_1\colon p < \frac{1}{6}$ $n = 120$ $\alpha = 0.001$

Optional: Erwartungswert μ und Standardabweichung σ für Näherung berechnen.

$\mu = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20$ $\sigma = \sqrt{120 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 4.0825$

Optional: Näherung der Grenzen mit inverser Normalverteilung berechnen:

$\varphi = 0.001 \quad \Longrightarrow \quad k_L \approx 7.3842$

Mit der kumulativen Binomialverteilung die Grenze genau bestimmen:

$P(X \leq 7) \approx 0.0003$
$P(X \leq 8) \approx 0.00102$

Bis $X \leq 7$ ist die kumulative Wahrscheinlichkeit noch kleiner als $\alpha = 0.001$. Der Verwerfungsbereich ist somit

$V = \{0;\ 1;\ \ldots;\ 7\}$

Die Sechs darf also höchstens 7-mal erscheinen.

5. **Glücksrad.** Ein Glücksrad hat acht gleich grosse Sektoren, von denen zwei mit einem Hauptgewinn beschriftet sind. Der Hersteller garantiert, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Hauptgewinn 25 % beträgt. Jemand vermutet, dass das Glücksrad zu selten Hauptgewinn anzeigt und beobachtet deshalb 120 Spiele, in denen 20-mal ein Hauptgewinn erscheint.

   Lässt sich diese Vermutung mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\,\%$ statistisch belegen?

Lösung: Erfolg bedeutet, dass ein Hauptgewinn erscheint.

$H_0\colon p = 0.25$ $H_1\colon p < 0.25$ $n = 120$ $\alpha = 0.05$

Optional: Erwartungswert μ und Standardabweichung σ für Näherung berechnen.

$\mu = 120 \cdot 0.25 = 30$ $\sigma = \sqrt{120 \cdot 0.25 \cdot 0.75} \approx 4.7434$

Optional: Näherung der Grenzen mit inverser Normalverteilung berechnen:

$\varphi = 0.05 \quad \Longrightarrow \quad k_L \approx 22.1978$

Mit der kumulativen Binomialverteilung die Grenze genau bestimmen:

$P(X \leq 21) \approx 0.0330$
$P(X \leq 22) \approx 0.0534$

Bis $X \leq 21$ ist die kumulative Wahrscheinlichkeit noch kleiner als $\alpha = 0.05$. Der Verwerfungsbereich ist somit

$V = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 21\}$

Da die beobachtete Anzahl von 20 Hauptgewinnen im Verwerfungsbereich liegt, kann die Nullhypothese verworfen werden. Auf dem Signifikanzniveau von $5\,\%$ lässt sich die Vermutung des Spielers belegen, dass das Glücksrad seltener Hauptgewinn anzeigt als vom Hersteller garantiert.

6. **Fünfseitiger Würfel.** Eine innovative Firma stellt neu einen fünfseitigen Spielwürfel her, mit dem die Zahlen 1 bis 5 gewürfelt werden können. Die Wahrscheinlichkeit soll angeblich für jede der fünf Zahlen genau gleich gross sein. Eine Gruppe von Tester:innen vermutet allerdings, dass die Zahl 5 mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $20\,\%$ gewürfelt wird.

   Es werden 5000 Würfe durchgeführt; 1050 davon ergeben die Zahl 5. Lässt sich bei einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ schliessen, dass die Zahl 5 mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $20\,\%$ gewürfelt wird?

   Lösung: Erfolg bedeutet, dass der Wurf die Zahl 5 ergibt.

   $$H_0\colon p = 0.2 \qquad H_1\colon p > 0.2 \qquad n = 5000 \qquad \alpha = 0.05$$

   Optional: Erwartungswert μ und Standardabweichung σ für Näherung berechnen.

   $$\mu = 5000 \cdot 0.2 = 1000 \qquad \sigma = \sqrt{5000 \cdot 0.2 \cdot 0.8} \approx 28.2843$$

   Optional: Näherung der Grenzen mit inverser Normalverteilung berechnen:

   $$\varphi = 0.95 \qquad \Longrightarrow \qquad k_R \approx 1046.5235$$

   Mit der kumulativen Binomialverteilung die Grenze genau bestimmen:

   $$P(X \leq 1046) \approx 0.9493$$
   $$P(X \leq 1047) \approx 0.9528$$

   Ab $X \leq 1047$ ist die Gegenwahrscheinlichkeit grösser als $1 - \alpha = 0.95$. Somit ist die nächst grössere Zahl 1048 die erste, die zum Verwerfungsbereich gehört. Dieser ist also:

   $$V = \{1048;\ \ldots;\ 5000\}$$

   Alternativ kann direkt die Wahrscheinlichkeit für das beobachtete Ergebnis berechnet werden: $P(X \geq 1050) = 1 - P(X \leq 1049) \approx 0.0407 < \alpha$.

   Da die beobachtete Anzahl von 1050 Fünfen im Verwerfungsbereich liegt, kann die Nullhypothese verworfen werden. Auf dem Signifikanzniveau von $5\,\%$ lässt sich also schliessen, dass die Zahl 5 mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $20\,\%$ gewürfelt wird.

7. **Eiertütschen.** Beim Eiertütschen messen sich immer ein rotes und ein blaues Ei, wobei jedes Mal ein neues Paar eingesetzt wird. Nicola stellt nach 10 Partien fest, dass 7-mal das rote Ei Sieger ist, und behauptet nun, die roten Eier seien stärker.

   (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sich irrt, weil ein solches oder ein noch besseres Ergebnis auch rein zufällig zustande kommen kann?

Lösung: Erfolg ist ein Sieg des roten Eis. Da rote und blaue Eier als gleich stark angenommen werden, gilt:

$$H_0\colon p = 0.5 \qquad H_1\colon p > 0.5 \qquad n = 10$$

Da die Versuchsanzahl zu klein ist, ist eine Schätzung mit der inversen Normalverteilung nicht sinnvoll. Direkt berechnen:

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) \approx 0.1719$$

Bei 7 roten Siegen in 10 Partien liegt man mit einer Wahrscheinlichkeit von $17.2\,\%$ auch rein zufällig – die Behauptung lässt sich statistisch also nicht belegen.

(b) Es wird weiter getütscht. Wie viele rote Siege braucht es bei 30 Partien, damit bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\,\%$ gerade noch verworfen werden kann?

Lösung: Nun mit $n = 30$ und $\alpha = 0.05$.

$$V = \{k;\ \ldots;\ 30\} \quad \text{mit dem kleinsten } k \text{ mit } P(X \geq k) \leq 0.05$$

Ausprobieren und dokumentieren:

$$P(X \geq 19) = 1 - P(X \leq 18) \approx 0.1002$$
$$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 0.0494$$

Der Verwerfungsbereich ist $V = \{20;\ \ldots;\ 30\}$. Das rote Ei muss also mindestens 20-mal siegen, damit die Überlegenheit bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $5\,\%$ als belegt gelten kann.

8. Münze. Es besteht der Verdacht, dass eine Münze häufiger Kopf als Zahl zeigt. Um das zu testen, wird die Münze 10-mal geworfen, wobei 7-mal Kopf fällt. Wie lautet der Verwerfungsbereich für das Signifikanzniveau von 5 %? und kann die Nullhypothese verworfen werden?

Lösung: Erfolg ist, dass die Münze Kopf zeigt.

$$H_0\colon p = 0.5 \qquad H_1\colon p > 0.5 \qquad n = 10 \qquad \alpha = 0.05$$

Da hier die Anzahl Versuche zu klein ist, ist eine Schätzung mit der inversen Normalverteilung nicht sinnvoll.

Ausprobieren:

$$P(X \leq 9) = 0.9990$$
$$P(X \leq 8) = 0.9893$$
$$P(X \leq 7) = 0.9453$$

Ab $X \leq 8$ ist die Gegenwahrscheinlichkeit grösser als $1 - \alpha = 0.95$. Damit ergibt sich der Verwerfungsbereich:

$$V = \{9;\ 10\}$$

Da 7-mal Kopf geworfen wird, kann nicht davon ausgegangen werden, dass die Münze häufiger Kopf zeigt.

9. **Medikament.** Ein Medikament besitzt eine Heilungschance von 80 %. Ein neues Medikament soll dann auf den Markt kommen, wenn seine Heilungswahrscheinlichkeit grösser als 80 % ist. Um dies zu überprüfen, wird es zuerst an 80 Personen getestet.

   Wie lautet ein entsprechender Hypothesentest für das Signifikanzniveau von $1\,\%$ und wie sieht dessen Verwerfungsbereich aus?

Lösung:

$H_0\colon p = 0.8$ $H_1\colon p > 0.8$ $n = 80$ $\alpha = 0.01$

Optional: Erwartungswert μ und Standardabweichung σ für Näherung berechnen.

$\mu = 80 \cdot 0.8 = 64$ $\sigma = \sqrt{80 \cdot 0.8 \cdot 0.2} \approx 3.5777$

Optional: Näherung der Grenzen mit inverser Normalverteilung berechnen:

$\varphi = 0.99 \quad \Longrightarrow \quad k_R \approx 72.3230$

Mit der kumulativen Binomialverteilung die Grenze genau bestimmen:

$P(X \leq 71) \approx 0.9869$
$P(X \leq 72) \approx 0.9947$

Ab $X \leq 72$ wird die Gegenwahrscheinlichkeit grösser als $1 - \alpha = 0.99$, also ist der Verwerfungsbereich

$V = \{73;\ \ldots;\ 80\}$