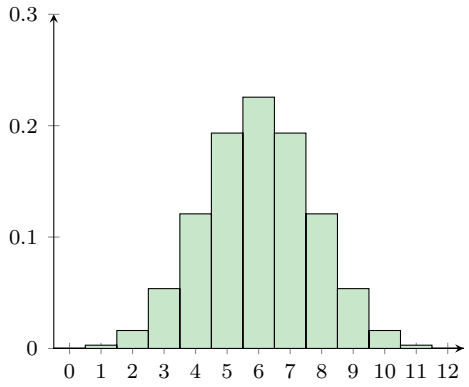
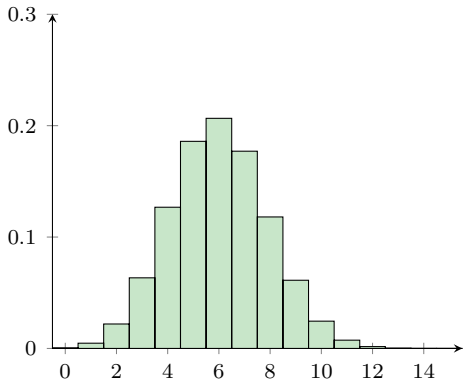
Zweiseitige Signifikanztests

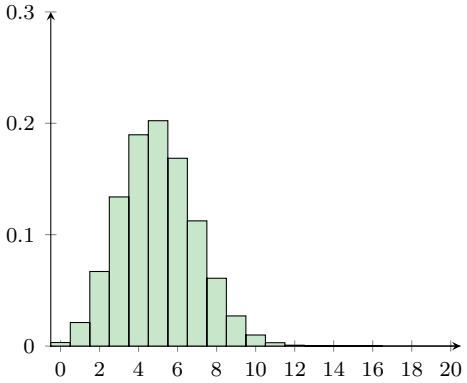
1. **Verwerfungsbereich einzeichnen.** Ermittle für die abgebildeten Binomialverteilungen die Verwerfungsbereiche für einen zweiseitigen Signifikanztest mit $H_0\colon p = p_0$ und $\alpha = 0.1$ und zeichne diese in den Diagrammen ein.



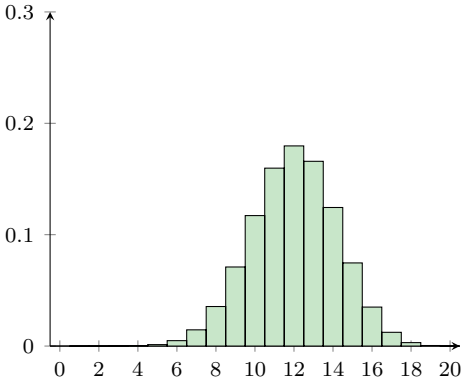
(a) $n = 12 \quad p_0 = 0.5$



(b) $n = 15 \quad p_0 = 0.4$



(c) $n = 20 \quad p_0 = 0.25$



(d) $n = 20 \quad p_0 = 0.6$

Lösung:

(a) $V = \{0;\ 1;\ 2\} \cup \{10;\ 11;\ 12\}$

(b) $V = \{0;\ 1;\ 2\} \cup \{10;\ \ldots;\ 15\}$

(c) $V = \{0;\ 1\} \cup \{9;\ \ldots;\ 20\}$

(d) $V = \{0;\ \ldots;\ 7\} \cup \{17;\ \ldots;\ 20\}$

2. **Geschlechterverhältnis.** Intuitiv liegt die Vermutung nahe: «Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Knaben ist gleich gross wie die für die Geburt eines Mädchens». Welche der folgenden Datensätze können mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 10\,\%$ als Bestätigung oder Widerlegung der Vermutung gesehen werden?

   (a) Eine Familie hat drei Kinder. Zwei davon sind Knaben.

Lösung: Die Stichprobe ist viel zu klein, um eine sinnvolle Aussage machen zu können.

(b) Die Geschlechterverteilung deiner Schulklasse.

Lösung: Die Stichprobe ist zu klein und nicht repräsentativ.

(c) Unter 1000 Neugeborenen in einem Spital sind 490, 501, 520 oder 550 Knaben.

Lösung: Der Test lautet:

$$H_0\colon p = 0.5 \qquad H_1\colon p \neq 0.5 \qquad n = 1000 \qquad \alpha = 0.1$$

Optional: Berechnen von Erwartungswert und Standardabweichung:

$$\mu = 1000 \cdot 0.5 = 500 \qquad \sigma = \sqrt{1000 \cdot 0.5 \cdot 0.5} \approx 15.8114$$

Optional: Ungefähre Grenzen mit inverser Normalverteilung abschätzen:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} = 0.05 \quad \Longrightarrow \quad k_L \approx 473.9926$$

$$\varphi = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \quad \Longrightarrow \quad k_R \approx 526.0074$$

Hier ist die Stichprobe so gross, dass die geschätzten Grenzen ohne genauere Überprüfung für den Verwerfungsbereich übernommen werden.

Bei Proben wird erwartet, dass der Verwerfungsbereich mit der Binomialverteilung genau bestimmt wird.

Der Verwerfungsbereich ist:

$$V = \{0;\ \ldots;\ 473\} \cup \{527;\ \ldots;\ 1000\}$$

Bei 550 Knaben wird also die Hypothese H_0 verworfen, bei den anderen Zahlen nicht.

(d) Im Jahr 2010 waren unter 80'290 Neugeborenen in der Schweiz 41'111 Knaben.

Lösung: Der Test lautet:

$$H_0\colon p = 0.5 \qquad H_1\colon p \neq 0.5 \qquad n = 80290 \qquad \alpha = 0.1$$

Berechnen von Erwartungswert und Standardabweichung:

$$\mu = 80290 \cdot 0.5 = 40145 \qquad \sigma = \sqrt{80290 \cdot 0.5 \cdot 0.5} \approx 141.6774$$

Ungefähre Grenzen mit inverser Normalverteilung abschätzen:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} = 0.05 \quad \Longrightarrow \quad k_L \approx 39911.9614$$

$$\varphi = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \quad \Longrightarrow \quad k_R \approx 40378.0386$$

Der Verwerfungsbereich lautet:

$$V = \{0;\ \ldots;\ 39911\} \cup \{40379;\ \ldots;\ 80290\}$$

Die Anzahl Knaben von 41111 liegt im Verwerfungsbereich, also wird die Nullhypothese verworfen. Im Jahr 2010 war das Geschlechterverhältnis bei den Neugeborenen nicht ausgeglichen.

(e) Unter 8029 Neugeborenen in einer Stadt sind 4111 Knaben.

Lösung: Der Test lautet:

$$H_0\colon p = 0.5 \qquad H_1\colon p \neq 0.5 \qquad n = 8029 \qquad \alpha = 0.1$$

Berechnen von Erwartungswert und Standardabweichung:

$$\mu = 8029 \cdot 0.5 = 4014.5 \qquad \sigma = \sqrt{8029 \cdot 0.5 \cdot 0.5} \approx 44.8023$$

Ungefähre Grenzen mit inverser Normalverteilung abschätzen:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} = 0.05 \quad \Longrightarrow \quad k_L \approx 3940.8068$$

$$\varphi = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \quad \Longrightarrow \quad k_R \approx 4088.1932$$

Der Verwerfungsbereich lautet:

$$V = \{0;\ \ldots;\ 3940\} \cup \{4089;\ \ldots;\ 8029\}$$

Die Anzahl Knaben von 4111 liegt im Verwerfungsbereich, also wird die Nullhypothese verworfen. Das Geschlechterverhältnis bei den Neugeborenen war nicht ausgeglichen.

3. **Fairer Würfel.** Ein Würfel wird 200-mal geworfen und dabei 44-mal die Sechs beobachtet. Eine Spielfirma behauptet, ihr Würfel sei fair, die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs also $p = \frac{1}{6}$.
   Teste mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\,\%$ die Behauptung der Firma gegen die zweiseitige Gegenhypothese.

Lösung: Erfolg bedeutet, dass der Würfel eine Sechs zeigt. Der Test lautet:

$$H_0\colon p = \tfrac{1}{6} \qquad H_1\colon p \neq \tfrac{1}{6} \qquad n = 200 \qquad \alpha = 0.05$$

Optional: Berechnen von Erwartungswert und Standardabweichung:

$$\mu = 200 \cdot \tfrac{1}{6} \approx 33.3333 \qquad \sigma = \sqrt{200 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{5}{6}} \approx 5.2705$$

Optional: Ungefähre Grenzen mit inverser Normalverteilung abschätzen:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} = 0.025 \quad \Longrightarrow \quad k_L \approx 23.0034$$

$$\varphi = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \quad \Longrightarrow \quad k_R \approx 43.6633$$

Genaue Grenzen suchen mit der Binomialverteilung:

$$P(X \leq 22) \approx 0.0163 \qquad P(X \leq 43) \approx 0.9699$$
$$P(X \leq 23) \approx 0.0269 \qquad P(X \leq 44) \approx 0.9801$$

Bis $X \leq 22$ bleibt die Wahrscheinlichkeit unter $\frac{\alpha}{2} = 0.025$; auf der rechten Seite gehört 44 noch nicht zum Verwerfungsbereich, da $P(X \geq 44) \approx 0.0301 > 0.025$, während $P(X \geq 45) \approx 0.0199 \leq 0.025$. Also ist der Verwerfungsbereich:

$$V = \{0;\ \ldots;\ 22\} \cup \{45;\ \ldots;\ 200\}$$

Da die beobachtete Anzahl von 44 Sechsen gerade noch nicht im Verwerfungsbereich liegt, gibt es auf dem Signifikanzniveau von $5\,\%$ keinen ausreichenden Hinweis, dass der Würfel nicht fair ist.

4. **Quiz-App.** Eine Quiz-App wirbt damit, dass $60\,\%$ der Spielenden die erste Frage richtig beantworten. In einer Zufallsstichprobe von 300 Spielenden konnten 158 die erste Frage lösen.

   Kann bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 1\,\%$ geschlossen werden, dass der Anteil der Spielenden, die die erste Frage richtig lösen, von $60\,\%$ abweicht?

Lösung: Erfolg bedeutet, dass eine Person die erste Frage richtig löst. Der Test lautet:

$$H_0\colon p = 0.6 \qquad H_1\colon p \neq 0.6 \qquad n = 300 \qquad \alpha = 0.01$$

Optional: Berechnen von Erwartungswert und Standardabweichung:

$$\mu = 300 \cdot 0.6 = 180 \qquad \sigma = \sqrt{300 \cdot 0.6 \cdot 0.4} \approx 8.4853$$

Optional: Ungefähre Grenzen mit inverser Normalverteilung abschätzen:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} = 0.005 \quad \Longrightarrow \quad k_L \approx 158.1434$$

$$\varphi = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \quad \Longrightarrow \quad k_R \approx 201.8566$$

Genaue Grenzen suchen mit der Binomialverteilung:

$$P(X \leq 157) \approx 0.0042 \qquad P(X \leq 201) \approx 0.9948$$
$$P(X \leq 158) \approx 0.0059 \qquad P(X \leq 202) \approx 0.9963$$

Also ist der Verwerfungsbereich:

$$V = \{0;\ \ldots;\ 157\} \cup \{203;\ \ldots;\ 300\}$$

Da die Anzahl der Spielenden mit 158 richtigen Antworten knapp nicht im Verwerfungsbereich liegt, kann bei einem Signifikanzniveau von $1\,\%$ nicht geschlossen werden, dass der beworbene Anteil von $60\,\%$ nicht stimmt.

5. **Mendel.** Gregor Mendel (1822-1884), der «Vater der Genetik», hat in einem seiner Experimente zwei reine Stämme von gelben und grünen Erbsen gekreuzt. Da gelb dominant ist, sind in der ersten Generation alle Erbsen gelb, und in der zweiten Generation ist gemäss seiner Theorie eine Erbse mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ grün. Er erhielt in der zweiten Generation 8023 Erbsen, von denen 2001 grün waren.

   (a) Gib die Nullhypothese und den Verwerfungsbereich eines Tests an, mit dem Mendels

Theorie auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$ überprüft werden kann.

Lösung: Der Test lautet:

$$H_0\colon p = 0.25 \qquad H_1\colon p \neq 0.25 \qquad n = 8023 \qquad \alpha = 0.05$$

Berechnen von Erwartungswert und Standardabweichung:

$$\mu = 8023 \cdot 0.25 = 2005.75 \qquad \sigma = \sqrt{8023 \cdot 0.25 \cdot 0.75} \approx 38.7855$$

Ungefähre Grenzen mit inverser Normalverteilung abschätzen für Wahrscheinlichkeiten:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} = 0.025 \quad \Longrightarrow \quad k_L = 1929.73$$

$$\varphi = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \quad \Longrightarrow \quad k_R = 2081.77$$

Also ist der Verwerfungsbereich:

$$V = \{0;\ \ldots;\ 1929\} \cup \{2083;\ \ldots;\ 8023\}$$

(b) Welche Folgerungen kannst du aus der beobachteten Häufigkeit von 2001 grünen Erbsen ziehen?

Lösung: 2001 liegt nicht im Verwerfungsbereich, die Hypothese wird nicht verworfen.

6. **Wasserverschmutzung.** Wasserverschmutzung durch chemische Substanzen kann langfristig dazu führen, dass sich die Geschlechterverteilung bei Fischen ändert. Anhand eines Probefangs von 50 Fischen soll überprüft werden, ob sich die Verteilung der Geschlechter bei einer Fischart in einem chemisch belasteten Fluss verändert hat. Normalerweise sind Männchen und Weibchen bei dieser Fischart gleich häufig.

   Entwirf einen entsprechenden Test mit einer Signifikanz von $\alpha = 10\,\%$.

Lösung: Der Test lautet:

$$H_0\colon p = 0.5 \qquad H_1\colon p \neq 0.5 \qquad n = 50 \qquad \alpha = 0.1$$

Berechnen von Erwartungswert und Standardabweichung:

$$\mu = 50 \cdot 0.5 = 25 \qquad \sigma = \sqrt{50 \cdot 0.5 \cdot 0.5} \approx 3.5355$$

Ungefähre Grenzen mit inverser Normalverteilung abschätzen für Wahrscheinlichkeiten:

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} = 0.05 \quad \Longrightarrow \quad k_L = 19.18$$

$$\varphi = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \quad \Longrightarrow \quad k_R = 30.82$$

Also ist der Verwerfungsbereich:

$$V = \{0;\ \ldots;\ 18\} \cup \{32;\ \ldots;\ 50\}$$

7. **Fehler erster Art.** Die Nullhypothese $H_0\colon p = 0.4$ soll gegen $H_1\colon p \neq 0.4$ mit einem Stichprobenumfang von $n = 60$ getestet werden. Der Verwerfungsbereich ist $V = \{0;\ \ldots;\ 16\} \cup \{34;\ \ldots;\ 60\}$. Wie gross ist die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit, d. h. der Fehler 1. Art?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art ist die Wahrscheinlichkeit, dass X im Verwerfungsbereich liegt, obwohl H_0 gilt. Hier also:

$$\begin{aligned} P(X \in V) &= P(X \leq 16) + P(X \geq 34) = P(X \leq 16) + \big(1 - P(X \leq 33)\big) \\ &\approx 0.0221 + \big(1 - 0.9934\big) = 0.0287 = \boxed{2.87\,\%} \end{aligned}$$